Nicolae Cotfas **Liviu Adrian Cotfas**

COMPLEMENTE DE MATEMATICĂ

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI

Introducere

Modelele teoretice au un rol important în înţelegerea fenomenelor fizice dar în general implică un aparat matematic destul de elaborat. Familiarizarea cu noţiunile şi rezultatele matematice strict necesare crează frecvent probleme studentului pasionat de fizică. In literatura de specialitate există tratate excelente scrise atât de fizicieni teoreticieni cât şi de matematicieni dar parcurgerea lor necesită timp iar tânarul fizician doreşte să aibă cât mai curând capacitatea de a citi anumite lucrări şi de a găsi o formulare matematică adecvată pentru modelele teoretice pe care doreşte să le propună.

Prezenta lucrare îşi propune să ofere un acces cât mai facil la câteva dintre noţiunile şi rezultatele matematice frecvent utilizate în descrierea fenomenelor fizice, în inginerie şi în anticiparea evoluţiei în domeniul economic şi financiar. Elementele de teorie, reduse la strictul necesar, sunt bogat ilustrate cu exemple adecvate. Autorii consideră că această abordare este potrivită pentru un prim contact cu noţiunile matematice prezentate şi oferă o bună bază pentru lectura ulterioară a unor lucrări conţinând o abordare mai profundă.

Se urmăreşte ca în paralel cu prezentarea noţiunilor şi rezultatelor matematice cititorul să fie familiarizat cu facilităţile oferite de programul MATHEMATICA în rezolvarea problemelor în care ele intervin. Textul este ilustrat un număr mare de figuri utile în înţelegerea conţinutului matematic. Lucrarea se adresează studenţilor de la facultăţile de fizică, dar poate fi utilă şi studenţilor de la facultăţile cu profil tehnic sau economic.

Bucureşti, 2009

Nicolae Cotfas
Liviu Adrian Cotfas

Cuprins

Capitolul 1

Elemente de analiză complexă

1.1 Numere complexe

Ecuaţia

$$2 + x = 1$$

nu admite soluţie în *mulţimea numerelor naturale*

$$\mathbb{N} = \{\ 0, 1, 2, 3, \dots\ \}$$

dar admite soluţia $x = -1$ în *mulţimea numerelor întregi*

$$\mathbb{Z} = \{\ \dots,\ 2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ \}$$

care este o extensie a lui $\mathbb{N}$ obţinută prin adăugarea întregilor negativi $-1,\ -2,\ -3,\ \dots$
Ecuaţia

$$2\,x = 1$$

nu admite soluţie în $\mathbb{Z}$ dar admite soluţie în *mulţimea numerelor raţionale*

$$\mathbb{Q} = \left\{\ \frac{n}{k}\ \middle|\ \ n \in \mathbb{Z},\ k \in \{1, 2, 3, \dots\}\ \right\} / \sim$$

formată din clase de fracţii echivalente

$$\frac{n}{k} \sim \frac{n'}{k'} \qquad \text{daca} \qquad n\,k' = n'\,k.$$

Soluţia ecuaţiei considerate este numărul raţional care se poate reprezenta folosind oricare dintre fracţiile echivalente

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{4}{8} \sim \cdots$$

Fiecare număr intreg n se identifică cu numărul raţional pentru care fracţia $\frac{n}{1}$ este reprezentant. Mulţimea numerelor raţionale devine în acest fel o extensie a mulţimii numerelor întregi $\mathbb{Z}$. In afară de reprezentarea sub formă de fracţie, pentru fiecare număr raţional se utilizează reprezentarea sub formă de fracţie zecimală obţinută prin efectuarea împărţirii numărătorului la numitor. De exemplu,

$$\frac{1}{2} = 0,5000... = 0,5 \qquad \frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6) \qquad \frac{2}{15} = 0,1333... = 0,1(3)\ .$$

Deoarece in cazul numărului $\frac{n}{k}$ pe parcursul efectuării împărţirii lui n la k singurele resturi posibile sunt $0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$ rezultă că în cazul reprezentării unui număr raţional sub formă de fracţie zecimală pot apare doar fracţiile zecimale finite, cele periodice şi cele periodice mixte. Se poate constata că, de exemplu, fracţiile 0.5 şi 0.4(9) reprezintă acelaşi număr raţional

$$0,4(9) = \frac{49-4}{90} = \frac{1}{2} = 0,5\ .$$

Pentru ca reprezentarea numerelor raţionale sub formă de fracţie zecimală să fie unică este suficient sa eliminăm fracţiile zecimale cu perioada 9. Ecuaţia

$$x^2 = 2$$

nu admite soluţie în $\mathbb{Q}$ dar admite soluţiile $x = \pm\sqrt{2}$ in *mulţimea numerelor reale*

$$\mathbb{R} = \left\{ \; n, a_1a_2a_3... \; \left| \; \begin{array}{r} n\in\mathbb{Z} \;\; \text{si nu exista k astfel incat} \\ a_j = 9 \text{ oricare ar fi } j \geq k \end{array} \right. \right\}$$

care este o extindere a mulţimii numerelor raţionale. Se ştie că în cazul $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ecuaţia de gradul al doilea ($a \neq 0$)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admite soluţiile reale

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

şi că în cazul $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ecuaţia considerată nu admite rădacini reale. Admiţând că în afară de numerele reale există un "număr imaginar" i astfel încât

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

ecuaţia considerată admite în cazul $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ soluţiile

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

aparţinând *mulţimii numerelor complexe*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i} = \{ z = x + y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Mulţimea $\mathbb{C}$ reprezintă o extindere a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, fiecare număr real x putând fi identificat în mod natural cu numărul complex $x+0\mathrm{i}$. Avem astfel relaţia (a se vedea figura 1.1)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Figura 1.1

Mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ considerată împreună cu operaţiile de *adunare a numerelor complexe*

$$(x+y\mathrm{i})+(x'+y'\mathrm{i})=(x+x')+(y+y')\mathrm{i}$$

şi de *înmulţire cu un număr real*

$$\alpha(x+y\mathrm{i})=\alpha x+\alpha y\mathrm{i}$$

este un spaţiu vectorial real de dimensiune 2. Scrierea unui număr complex sub forma $z=x+y\mathrm{i}$ reprezintă dezvoltarea lui în raport cu baza $\{1,\,\mathrm{i}\}$. Aplicaţia

$$\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C}:(x,y)\mapsto x+y\mathrm{i}$$

este un izomorfism care permite identificarea celor două spaţii vectoriale. Relaţia $\mathrm{i}^2=-1$ permite definirea unei operaţii suplimentare pe $\mathbb{C}$, fără analog în $\mathbb{R}^2$

$$(x+y\mathrm{i})(x'+y'\mathrm{i})=(xx'-yy')+(xy'+yx')\mathrm{i}.$$

numită *înmulţirea numerelor complexe*. Mulţimea $\mathbb{C}$ considerată împreuna cu operaţiile de adunare şi înmulţire a numerelor complexe este un corp comutativ. In particular, fiecare număr complex nenul admite un invers

$$(x+y\mathrm{i})^{-1}=\frac{1}{x+y\mathrm{i}}=\frac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}.$$

Definiţia 1.1 *Fie* $z=x+y\mathrm{i}$ *un număr complex.*

Numărul $\mathfrak{Re}\,z=x$ *se numeşte* partea reală *a lui* z.

Numărul $\mathfrak{Im}\,z=y$ *se numeşte* partea imaginară *a lui* z.

Numărul $\bar{z}=x-y\mathrm{i}$ *se numeşte* conjugatul *lui* z.

Numărul $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ *se numeşte* modulul *lui* z.

Propoziţia 1.2 *Relaţiile*

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2 \qquad \overline{z_1\,z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2 \qquad \overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$$

$$|\bar{z}|=|z| \qquad |z|^2=z\,\bar{z} \qquad \overline{(\bar{z})}=z$$

$$\mathfrak{Re}\,z=\tfrac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathfrak{Im}\,z=\tfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} \qquad z=\mathfrak{Re}\,z+\mathfrak{Im}\,z\,\mathrm{i}.$$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1, z_2 *şi* z.

Demonstraţie. Relaţiile rezultă direct din definiţia anterioară. ∎

Propoziţia 1.3 *Oricare ar fi numărul complex $z = x + y\mathrm{i}$ avem*

$$\left.\begin{array}{l}|x| \\ |y|\end{array}\right\} \leq |x+y\mathrm{i}| \leq |x| + |y|$$

adică

$$\left.\begin{array}{l}|\mathfrak{Re}\, z| \\ |\mathfrak{Im}\, z|\end{array}\right\} \leq |z| \leq |\mathfrak{Re}\, z| + |\mathfrak{Im}\, z|.$$

Demonstraţie. Avem

$$|x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \qquad |x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$$

iar relaţia

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

este echivalentă cu relaţia evident adevărată

$$x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2. \blacksquare$$

Propoziţia 1.4 *Aplicaţia modul*

$$|\ | : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad |z| = |x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

este o normă pe spaţiul vectorial real $\mathbb{C}$, iar

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

este distanţa asociată.

Demonstraţie. Oricare ar fi numărul complex $z = x + y\mathrm{i}$ avem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

şi

$$|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0.$$

Dacă α este un număr real atunci

$$|\alpha z| = |(\alpha x) + (\alpha y)\mathrm{i}| = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2(x^2+y^2)} = |\alpha|\,|z|.$$

Oricare ar fi numerele $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ şi $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ avem relaţia

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\,\bar{z}_2 + \bar{z}_1\,z_2\\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathfrak{Re}\,(z_1\,\bar{z}_2) \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\mathfrak{Re}\,(z_1\,\bar{z}_2)|\\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\,\bar{z}_2| = (|z_1| + |z_2|)^2\end{aligned}$$

din care rezultă că

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|. \;\blacksquare$$

Observaţia 1.1 Dacă considerăm $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu norma uzuală

$$||\ || : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad ||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$$

atunci

$$||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2} = |x+y\mathrm{i}|$$

ceea ce arată că aplicaţia liniară

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} :\ (x,y) \mapsto x + y\mathrm{i}$$

este un izomorfism de spaţii vectoriale normate care permite identificarea spaţiilor normate $(\mathbb{R}^2, ||\ ||)$ şi $(\mathbb{C}, |\ |)$. Dacă se are în vedere doar structura de spaţiu vectorial normat, spaţiile $(\mathbb{R}^2, ||\ ||)$ şi $(\mathbb{C}, |\ |)$ diferă doar prin notaţiile utilizate. Distanţa

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

dintre două numere $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ şi $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ în planul complex corespunde distanţei dintre punctele corespunzătoare din planul euclidian (a se vedea figura 1.2)

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

Figura 1.2

Observaţia 1.2

$$|z_1 - z_2| = \text{ distanta in planul complex intre } z_1 \text{ si } z_2.$$

$$|z| = |z - 0| = \text{ distanta in planul complex intre } z \text{ si origine.}$$

Fie $a \in \mathbb{C}$ fixat şi $r \in (0, \infty)$. Mulţimea

$$B_r(a) = \{ \ z \mid \ |z-a|<r \ \}$$

se numeşte *discul* (deschis) de centru a şi rază r (a se vedea figura 1.3).

Figura 1.3

Definiţia 1.5 *Spunem că o mulţime $M \subset \mathbb{C}$ este* mărginită *dacă există $a \in \mathbb{C}$ şi $r \in (0, \infty)$ astfel încât $M \subseteq B_r(a)$.*

Exerciţiul 1.1 Mulţimea M este mărginită dacă şi numai dacă există $r \in (0, \infty)$ astfel încât $|z| \leq r$, oricare ar fi $z \in M$.

Figura 1.4

Definiţia 1.6 *O mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ este numită* mulţime deschisă *dacă oricare ar fi $a \in D$ exista $r \in (0, \infty)$ astfel încât $B_r(a) \subset D$. Spunem că despre o mulţime $F \subseteq \mathbb{C}$ că este* închisă *dacă mulţimea $\mathbb{C} \backslash F$ este deschisă.*

Exemplul 1.2

a) Discul $B_1(0)$ este mulţime deschisă.
b) Semiplanul $\{\ z \mid \ \mathfrak{Im}\ z > 0\ \}$ este mulţime deschisă.
c) Orice mulţime finită $F \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime închisă.
d) Semiplanul $\{\ z \mid \ \mathfrak{Re}\ z \geq 0\ \}$ este mulţime închisă.

Definiţia 1.7 *O mulţime $K \subseteq \mathbb{C}$ este numită* mulţime compactă *dacă este închisă şi mărginită.*

Exerciţiul 1.3 Să se arate că relaţiile

$$\begin{array}{ll} a) & |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \\ b) & \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leq |z_1 - z_2| \\ c) & |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2 \end{array}$$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1 şi z_2.

Rezolvare. a) Avem

$$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

b) Din

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|, \qquad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \le |z_2 - z_1| + |z_1|$$

rezultă relaţia

$$-|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

echivalentă cu

$$|\,|z_1| - |z_2|\,| \le |z_1 - z_2|.$$

c) Prin calcul direct obţinem

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2.$$

Definiţia 1.8 *Spunem că şirul* $(z_n)_{n\ge 0}$ *este* convergent *la* a *şi scriem*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0.$$

Observaţia 1.3 Din relaţia

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - \alpha| \\ \\ |y_n - \beta| \end{array}\right\} \le |(x_n + y_n\mathrm{i}) - (\alpha + \beta\mathrm{i})| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n\mathrm{i}) = \alpha + \beta\mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \\ \\ \lim_{n\to\infty} y_n = \beta. \end{cases}$$

adică şirul de numere complexe $(z_n)_{n\ge 0}$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $(\mathfrak{Re}\, z_n)_{n\ge 0}$ şi $(\mathfrak{Im}\, z_n)_{n\ge 0}$ sunt convergente şi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Re}\, z_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Im}\, z_n.$$

Definiţia 1.9 *Un şir* $(z_n)_{n\geq 0}$ *este* mărginit *dacă există* $r\in(0,\infty)$ *astfel încât*

$$|z_n|\leq r, \qquad \text{oricare ar fi } n\geq 0.$$

Observaţia 1.4 Din relaţia

$$\left.\begin{array}{l}|x_n|\\ \\ |y_n|\end{array}\right\}\leq |x_n+y_n\mathrm{i}|\leq |x_n|+|y_n|$$

rezultă că şirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $(\mathfrak{Re}\, z_n)_{n\geq 0}$ şi $(\mathfrak{Im}\, z_n)_{n\geq 0}$ sunt mărginite.

Observaţia 1.5 Oricare ar fi φ şi ψ avem

$$(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)=(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)$$
$$+\mathrm{i}(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi)=\cos(\varphi+\psi)+\mathrm{i}\sin(\varphi+\psi).$$

Utilizând notaţia lui Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=\cos t+\mathrm{i}\sin t$$

relaţia anterioară devine

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}.$$

Observaţia 1.6 Pentru orice număr nenul $z=x+y\mathrm{i}$ există $\arg z\in(-\pi,\pi]$ încât

$$z=|z|(\cos(\arg z)+\mathrm{i}\sin(\arg z))=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}.$$

Figura 1.5

Numărul $\arg z$, numit *argumentul principal* al lui $z = x + y\mathrm{i}$, este

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{daca} \quad x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{daca} \quad x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{daca} \quad x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{daca} \quad x = 0,\ y > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{daca} \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Se ştie că în cazul numerelor reale este utilă introducerea simbolurilor ∞ şi $-\infty$ cu proprietăţi binecunoscute din matematica de liceu şi considerarea *dreptei reale încheiate*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

In cazul planului complex se obţin avantaje similare prin adaugarea, de această dată, a unui singur punct "de la infinit" notat cu ∞ şi prin considerarea *planului complex extins*

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Definiţia 1.10 *Spunem că şirul de numere complexe* $(z_n)_{n \geq 0}$ *are* limita infinită

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$$

dacă

$$\lim_{n \to \infty} |z_n| = \infty.$$

Observaţia 1.7 Programul MATHEMATICA permite utilizarea comodă a funcţiilor

$$\Re \qquad \Im \qquad \bar{} \qquad |\;| \qquad \arg.$$

1.2 Functii complexe de variabilă complexă

Prin *funcţie complexă* se înţelege orice funcţie cu valori complexe. In cazul funcţiilor reale de variabilă reală, noţiunea de funcţie derivabilă este binecunoscută din liceu.

Definiţia 1.11 *Spunem că funcţia reală de variabilă reală*

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este derivabilă *în punctul* $t_0 \in (a, b)$ *dacă există şi este finită limita*

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

numită derivata *funcţiei* f *în punctul* t_0.

Observaţia 1.8 Definiţia anterioară nu poate fi extinsă direct la funcţiile de două variabile

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

deoarece relaţia

$$f'(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{(x, y) - (x_0, y_0)}$$

este fără sens, împărţirea cu vectorul $(x-x_0, y-y_0) = (x, y)-(x_0, y_0)$ nefiind definită. Posibilitatea împărţirii cu un număr complex nenul permite insă definirea derivabilităţii unei funcţii de variabilă complexă urmând direct analogia cu cazul real.

Definiţia 1.12 *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *o mulţime deschisă. Spunem că funcţia complexă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$-derivabilă *(sau* olomorfă*) în punctul* $z_0 \in D$ *dacă există şi este finită limita*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

numită derivata *funcţiei* f *în punctul* z_0. *In loc de* $f'(z_0)$ *scriem uneori* $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Exemplul 1.4 a) Funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^3$$

este $\mathbb{C}$-derivabilă în orice punct $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^2 + z_0 z + z_0^2) = 3z_0^2$$

şi $f'(z) = 3z^2$, adică avem

$$(z^3)' = 3z^2.$$

b) Funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \bar{z}$$

nu este $\mathbb{C}$-derivabilă în $z_0 = 1$ deoarece limita

$$\lim_{z \to 1} \frac{\bar{z} - 1}{z - 1}$$

nu există. Alegând şirul $z_n = \frac{n}{n+1}$ cu $\lim_{n \to \infty} z_n = 1$ obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = 1$$

dar alegând şirul $z_n = 1 + \frac{1}{n+1}\mathrm{i}$ cu $\lim_{n \to \infty} z_n = 1$ obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = -1.$$

Observaţia 1.9 Bazându-ne pe identificarea lui $\mathbb{C}$ cu $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ x + y\mathrm{i} \mapsto (x, y)$$

putem descrie orice funcţie complexă de o variabilă complexă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu ajutorul a două funcţii reale de câte două variabile reale

$$f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)\,\mathrm{i}$$

unde

$$u = \mathfrak{Re}\ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea reala a lui } f$$

$$v = \mathfrak{Im}\ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea imaginara a lui } f.$$

Exemplul 1.5 a) In cazul funcţiei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \bar{z}$$

avem

$$f(x + y\mathrm{i}) = x - y\mathrm{i}$$

adică

$$u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = -y.$$

b) In cazul funcţiei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^2$$

avem

$$f(x + y\mathrm{i}) = (x + y\mathrm{i})^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i}$$

şi prin urmare

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Observaţia 1.10 Conform definiţiei, funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)\,\mathrm{i}$$

este $\mathbb{C}$-derivabilă în $z_0 = x_0 + y_0\mathrm{i}$ dacă şi numai dacă există şi este finită limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Pentru ca

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

este necesar ca

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \alpha + \beta\mathrm{i}, \qquad \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t\mathrm{i}) - f(z_0)}{t\mathrm{i}} = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

adică să aibă loc relaţiile

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t}\mathrm{i} = \alpha + \beta\mathrm{i}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t\mathrm{i}}+\lim_{t\to 0}\frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t\mathrm{i}}\mathrm{i}=\alpha+\beta\mathrm{i}$$

echivalente cu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\alpha=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\beta=-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

In particular, dacă f este $\mathbb{C}$-derivabilă în $z_0\!=\!x_0\!+\!y_0\mathrm{i}$ atunci

$$f'(x_0+y_0\mathrm{i})=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{i}.$$

Teorema 1.13 *(Cauchy-Riemann) Funcţia*

$$f:D\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(x+yi)=u(x,y)+v(x,y)\,\mathrm{i}$$

definită pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{C}$ este $\mathbb{C}$-derivabilă în punctul $z_0\!=\!x_0\!+\!y_0\mathrm{i}\in D$ dacă şi numai dacă funcţiile reale

$$u:D\longrightarrow\mathbb{R},\qquad v:D\longrightarrow\mathbb{R}$$

sunt $\mathbb{R}$-diferenţiabile în (x_0,y_0) şi verifică relaţiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

In aceste condiţii

$$f'(x_0+y_0\mathrm{i})=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{i}.$$

Demonstraţie. A se vedea [4].

Definiţia 1.14 *Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Spunem că funcţia*

$$f:D\longrightarrow\mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$-derivabilă *(sau* olomorfă*) dacă este $\mathbb{C}$-derivabilă în orice punct din D.*

Exerciţiul 1.6 Să se arate ca funcţia

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(z)=z^2$$

este olomorfă şi să se determine $f'(z)$.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x+y\mathrm{i}) = (x+y\mathrm{i})^2 = (x^2-y^2) + 2xy\mathrm{i}$$

şi prin urmare

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy.$$

Funcţiile u şi v sunt $\mathbb{R}$-diferenţiabile în orice punct şi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Derivata lui f este

$$f'(x+y\mathrm{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{i} = 2x + 2y\mathrm{i}$$

adică, $f'(z) = 2z$.

Exerciţiul 1.7 Să se arate ca funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \bar{z}$$

nu este $\mathbb{C}$-derivabilă în niciun punct.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x+y\mathrm{i}) = x - y\mathrm{i}$$

adică

$$u(x,y) = x, \qquad v(x,y) = -y.$$

In acest caz relaţiile Cauchy-Riemann nu sunt verificate în niciun punct deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1.$$

Definiţia 1.15 *Funcţia*

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^z$$

unde

$$\mathrm{e}^{x+y\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{y\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y) = \mathrm{e}^x\,\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\,\sin y$$

este numită funcţia exponenţială *(complexă).*

Observaţia 1.11 Funcţia exponenţială este o funcţie periodică cu perioada $2\pi\mathrm{i}$

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$$

şi

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$$

oricare ar fi $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

Exerciţiul 1.8 Să se arate ca funcţia exponenţială

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^z$$

este olomorfă şi

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z.$$

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Din relaţia

$$f(x+y\mathrm{i}) = \mathrm{e}^x\,\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\,\sin y$$

rezultă că $u(x,y) = \mathrm{e}^x\,\cos y$ şi $v(x,y) = \mathrm{e}^x\,\sin y$. Funcţiile reale u şi v sunt $\mathbb{R}$-diferenţiabile în orice punct şi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x\,\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\mathrm{e}^x\,\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Derivata lui f este

$$f'(z) = f'(x+y\mathrm{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{i} = \mathrm{e}^x\,\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x\,\sin y = \mathrm{e}^z.$$

Observaţia 1.12 a) Dacă funcţiile $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sunt olomorfe atunci

$$(\alpha f \pm \beta g)' = \alpha\, f' + \beta\, g' \qquad\qquad (fg)' = f'g + fg'$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dacă în plus $g(z) \neq 0$, oricare ar fi $z \in D$, atunci

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

b) Dacă funcţiile $D \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ sunt olomorfe atunci

$$\frac{d}{dz}(g(f(z)) = g'(f(z))\, f'(z).$$

Exerciţiul 1.9 Funcţiile complexe

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \cos z = \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \sin z = \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{ch} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathrm{ch}\, z = \tfrac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{sh} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathrm{sh} z = \tfrac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

sunt olomorfe şi

$$(\cos z)' = -\sin z \qquad\qquad (\sin z)' = \cos z$$

$$(\mathrm{ch}\, z)' = \mathrm{sh}\, z \qquad\qquad (\mathrm{sh}\, z)' = \mathrm{ch}\, z.$$

Rezolvare. Calcul direct.

Observaţia 1.13 Funcţia exponenţială reală

$$\mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty) : \;\; x \mapsto \mathrm{e}^x$$

este bijectivă. Inversa ei este funcţia logaritm natural

$$(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : \;\; x \mapsto \ln x.$$

Avem

$$x = \mathrm{e}^{\ln x}$$

oricare ar fi $x \in (0,\infty)$. In cazul complex, putem obţine o relaţie oarecum similară

$$z = |z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} = \mathrm{e}^{\ln|z|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} = \mathrm{e}^{\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)}$$

adevărată oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Definiţia 1.16 *Fie mulţimea*

$$D_0 = \mathbb{C}\backslash\{\ z \ |\ \ \mathfrak{Im}\ z=0,\ \mathfrak{Re}\ z\leq 0\ \}.$$

Funcţiile

$$\log_k : D_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \log_k z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$$

depinzând de parametrul $k \in \mathbb{Z}$ sunt numite ramuri uniforme ale funcţiei logaritmice.

Exerciţiul 1.10 Să se determine funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

care îndeplineşte condiţiile

$$\mathfrak{Im}\, f(x,y) = 2xy + y, \qquad f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}.$$

Rezolvare. Căutând funcţia f de forma

$$f(x+y\mathrm{i}) = u(x,y) + (2xy+y)\mathrm{i}$$

din teorema Cauchy-Riemann deducem relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x+1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y$$

din care rezultă că $u(x,y) = x^2 - y^2 + x + c$, unde c este o constantă. Impunând condiţia suplimentară $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ obţinem

$$f(x+y\mathrm{i}) = x^2 - y^2 + x + 1 + (2xy+y)\mathrm{i} = (x+y\mathrm{i})^2 + (x+y\mathrm{i}) + 1$$

adică $f(z) = z^2 + z + 1$.

1.3 Integrala complexă

Propoziţia 1.17 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Aplicaţia*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D, \qquad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{i}.$$

este continuă dacă şi numai dacă aplicaţiile reale

$$\varphi = \mathfrak{Re}\ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi = \mathfrak{Im}\ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt continue.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din relaţia

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \\ \\ |\psi(t) - \psi(t_0)| \end{array}\right\} \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq |\varphi(t) - \varphi(t_0)| + |\psi(t) - \psi(t_0)|. \ \blacksquare$$

Definiţia 1.18 *Spunem că aplicaţia*

$$\gamma : (a,b) \longrightarrow D$$

este derivabilă *în punctul $t_0 \in (a,b)$ dacă există şi este finită limita*

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Spunem că γ este aplicaţie derivabilă *dacă este derivabilă în orice punct $t_0 \in (a,b)$.*

Observaţia 1.14 In cazul unei aplicaţii

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

prin $\gamma'(a)$ şi $\gamma'(b)$ vom înţelege derivatele laterale

$$\gamma'(a) = \lim_{t \searrow a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a}, \qquad \gamma'(b) = \lim_{t \nearrow b} \frac{\gamma(t) - \gamma(b)}{t - b}.$$

Propoziţia 1.19 *Aplicaţia*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D, \qquad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{i}.$$

este derivabilă dacă şi numai dacă aplicaţiile reale

$$\varphi = \mathfrak{Re}\,\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi = \mathfrak{Im}\,\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt derivabile şi

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) + \psi'(t)\,\mathrm{i}.$$

Demonstraţie. Avem

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} + \lim_{t\to t_0} \frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\,\mathrm{i}. \ \blacksquare$$

Definiţia 1.20 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Prin* drum neted *în D se înţelege o aplicaţie derivabilă*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

cu derivata $\gamma' : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continuă.

Exemplul 1.11

a) Oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$ aplicaţia constantă

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z$$

este un drum neted în $\mathbb{C}$ (numit *drum punctual*).

b) Oricare ar fi numerele complexe z_1 şi z_2 aplicaţia

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = (1-t)\,z_1 + t\,z_2$$

este un drum neted în $\mathbb{C}$ (*drumul liniar* ce leagă z_1 cu z_2).

c) Oricare ar fi $z_0 = x_0 + y_0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ şi $r \in (0,\infty)$ aplicaţia

$$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = x_0 + r\cos t + (y_0 + r\sin t)\mathrm{i}$$

este un drum neted în $\mathbb{C}$ (numit *drum circular* de rază r şi centru z_0).

Figura 1.6

Definiţia 1.21 *Fie* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *o funcţie continuă şi fie* $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ *un drum neted în* D*. Prin* integrala complexă *a funcţiei* f *de-a lungul drumului* γ *(a se vedea figura 1.6) se înţelege numărul*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Exerciţiul 1.12 Fie funcţia

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z}$$

unde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ şi drumul neted

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Să se calculeze

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Rezolvare. Deoarece $f(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ şi $\gamma'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ obţinem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

Observaţia 1.15 In cazul unui drum punctual $\gamma(t)=z$ avem $\gamma'(t)=0$ şi prin urmare

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

oricare ar fi funcţia f.

Observaţia 1.16 Dacă $f(x+y\mathrm{i}) = u(x,y) + v(x,y)\mathrm{i}$ şi $\gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{i}$ atunci

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\gamma f(z)dz = &\textstyle\int_a^b [u(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) - v(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)]\,dt\\ &+\mathrm{i}\textstyle\int_a^b [u(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t) + v(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)]\,dt.\end{aligned}$$

Exerciţiul 1.13 Calculaţi

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz$$

unde γ este drumul liniar ce leagă $z_1 = 1$ cu $z_2 = \mathrm{i}$.

Rezolvare. Deoarece

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = (1-t)1 + t\mathrm{i}$$

avem relaţiile $f(\gamma(t)) = \overline{\gamma(t)} = 1 - t - t\mathrm{i}$ şi $\gamma'(t) = -1 + \mathrm{i}$ din care rezultă

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^1 (1-t-t\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})dt = \int_0^1 (-1+2t)dt + \mathrm{i}\int_0^1 dt = \mathrm{i}.$$

Definiţia 1.22 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime. Spunem că drumurile netede*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D \qquad si \qquad \gamma_1 : [a_1,b_1] \longrightarrow D$$

sunt echivalente *dacă există o aplicaţie bijectivă derivabilă strict crescătoare*

$$\chi : [a_1,b_1] \longrightarrow [a,b]$$

astfel încât

$$\gamma_1(s) = \gamma(\chi(s)), \qquad oricare\ ar\ fi\ \ s \in [a_1,b_1].$$

Observaţia 1.17 Relaţia definită este o relaţie de echivalenţă care permite împărţirea mulţimii drumurilor netede în clase de echivalenţă. Fiecare clasă de echivalenţă corespunde unei *curbe netede*, elementele clasei fiind numite *parametrizări* ale curbei considerate.

Propoziţia 1.23 *Dacă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie continuă şi dacă drumurile netede

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow D$$

sunt echivalente atunci

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

adică valoarea integralei depinde de curba aleasă şi nu de parametrizarea utilizată.

Demonstraţie. Folosind metoda schimbării de variabilă obţinem

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\gamma_1} f(z)\, dz &= \textstyle\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\, \gamma_1'(s)\, ds \\ &= \textstyle\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\chi(s)))\, \gamma'(\chi(s))\, \chi'(s)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f(z)\, dz. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Observaţia 1.18 Orice drum

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este echivalent cu un drum definit pe $[0,1]$ şi anume

$$\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow D, \qquad \gamma_0(t) = \gamma((1-t)a + tb).$$

Definiţia 1.24 *Fie $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ un drum neted. Drumul*

$$\tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow D, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$$

se numeşte inversul *drumului γ.*

Propoziţia 1.25 *Dacă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie continuă şi

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

un drum neted în D atunci

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Demonstraţie. Utilizând schimbarea de variabilă $s = a+b-t$ obţinem

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz &= \textstyle\int_a^b f(\tilde{\gamma}(t))\, \tilde{\gamma}'(t)\, dt = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\, \gamma'(a+b-t)\, dt \\ &= \textstyle\int_b^a f(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = -\int_{\gamma} f(z)\, dz. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Definiţia 1.26 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Prin* drum neted pe portiuni *în D se înţelege o aplicaţie continuă*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

cu proprietatea că există o diviziune $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ astfel încât

1) restricţiile $\gamma|_{(t_{i-1},t_i)}$ sunt derivabile oricare ar fi $i \in \{1,2,\ldots,n\}$

2) există şi sunt finite limitele

$$\lim_{t \searrow a} \gamma'(t), \qquad \lim_{t \searrow t_j} \gamma'(t), \qquad \lim_{t \nearrow t_j} \gamma'(t), \qquad \lim_{t \searrow b} \gamma'(t)$$

oricare ar fi $j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

Observaţia 1.19 Drumul neted pe porţiuni considerat este format din drumurile netede

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 = \gamma|_{[t_0,t_1]}\\
&\gamma_2 : [t_1, t_2] \longrightarrow D, \qquad \gamma_2 = \gamma|_{[t_1,t_2]}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\gamma_n : [t_{n-1}, t_n] \longrightarrow D, \qquad \gamma_n = \gamma|_{[t_{n-1},t_n]}
\end{aligned}$$

şi pentru orice funcţie continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definim *integrala complexă* a funcţiei f de-a lungul drumului γ ca fiind

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Toate drumurile pe care le vom considera în continuare vor fi drumuri netede pe porţiuni şi le numim simplu drumuri.

Figura 1.7

Exemplul 1.14 Aplicaţia (a se vedea figura 1.7)

$$\gamma : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} & \text{daca} \quad t \in [0, 1] \\ 2t - 3 & \text{daca} \quad t \in (1, 2] \end{cases}$$

este un drum neted pe porţiuni în $\mathbb{C}$ şi pentru orice funcţie continuă

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

avem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}t})\,\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}t}dt + \int_1^2 f(2t-3)\,2dt.$$

Definiţia 1.27 *Spunem că funcţia*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe o mulţime deschisă D admite primitivă *în* D *dacă există*

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

funcţie olomorfă cu proprietatea

$$g'(z) = f(z), \qquad \textit{oricare ar fi} \;\; z \in D.$$

Exemplul 1.15

a) Dacă $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ atunci funcţia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^k = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ ori}}$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}\right)' = z^k, \qquad \text{oricare ar fi} \;\; z \in \mathbb{C}.$$

b) Dacă $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ atunci funcţia

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^{-k} = \frac{1}{z^k}$$

admite în $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{z^{1-k}}{1-k} = -\frac{1}{(k-1)z^{k-1}}$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{1-k}}{1-k}\right)' = z^{-k}, \qquad \text{oricare ar fi} \;\; z \in \mathbb{C}^*.$$

c) Funcţia exponenţială

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(z)=\mathrm{e}^z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad g(z)=\mathrm{e}^z$$

deoarece

$$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z,\qquad \text{oricare ar fi}\ \ z\in\mathbb{C}.$$

d) Funcţia

$$\cos:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(z)=\cos z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad g(z)=\sin z$$

deoarece

$$(\sin z)'=\cos z,\qquad \text{oricare ar fi}\ \ z\in\mathbb{C}.$$

e) Funcţia

$$\sin:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad f(z)=\sin z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad g(z)=-\cos z$$

deoarece

$$(-\cos z)'=\sin z,\qquad \text{oricare ar fi}\ \ z\in\mathbb{C}.$$

Propoziţia 1.28 *Dacă funcţia continuă*

$$f:D\longrightarrow\mathbb{C}$$

admite în D o primitivă

$$g:D\longrightarrow\mathbb{C}$$

şi dacă

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow D$$

este un drum conţinut în D atunci

$$\int_\gamma f(z)dz=g(z)|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}=g(\gamma(b))-g(\gamma(a)).$$

Demonstraţie. Utilizând formula de schimbare de variabilă obţinem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b g'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \tfrac{d}{dt} g(\gamma(t))\,dt = g(\gamma(t))|_{t=a}^{t=b} = g(z)|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)}. \ \blacksquare$$

Observaţia 1.20 Din propoziţia anterioară rezultă că în cazul în care funcţia

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite primitivă în D, integrala pe un drum

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

conţinut în D depinde doar de capetele $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ ale drumului. Dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow D$$

sunt două drumuri în D astfel încât $\gamma(a) = \gamma_1(a)$ şi $\gamma(b) = \gamma_1(b)$ atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Exerciţiul 1.16 Să se calculeze integralele

$$\int_\gamma z^3\,dz, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz, \qquad \int_\gamma \mathrm{e}^z\,dz, \qquad \int_\gamma (2z^3 + \frac{5}{z^2} - \mathrm{e}^z)\,dz$$

γ fiind un drum în $\mathbb{C}^*$ cu originea $z_1 = 1$ şi extremitatea $z_2 = \mathrm{i}$ (a se vedea figura 1.8).

Figura 1.8

Rezolvare. Fie $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un drum cu originea $z_1 = 1$ şi extremitatea $z_2 = \mathrm{i}$, adică astfel încât $\gamma(a) = 1$ şi $\gamma(b) = \mathrm{i}$. Avem

$$\int_\gamma z^3\, dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = \left.\frac{z^4}{4}\right|_{z=1}^{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 0,$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz = -\left.\frac{1}{z}\right|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = -\left.\frac{1}{z}\right|_{z=1}^{z=\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{i}} + 1 = 1 + \mathrm{i},$$

$$\int_\gamma \mathrm{e}^z\, dz = \mathrm{e}^z|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = \mathrm{e}^z|_{z=1}^{z=\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \mathrm{e} = \cos 1 + \mathrm{i}\sin 1 - \mathrm{e},$$

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\gamma (2z^3 + \frac{5}{z^2} - \mathrm{e}^z)\, dz &= \textstyle 2\int_\gamma z^3\, dz + 5\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz - \int_\gamma \mathrm{e}^z\, dz \\ &= 5 + \mathrm{e} - \cos 1 + (5 - \sin 1)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Definiţia 1.29 *Spunem că* γ *este un* drum închis *dacă*

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

adică originea $\gamma(a)$ *şi* extremitatea $\gamma(b)$ *coincid.*

Propoziţia 1.30 *Dacă funcţia continuă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite în D *o primitivă*

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

şi dacă

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$$

este un drum închis conţinut în D *atunci*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece $\gamma(a) = \gamma(b)$ avem

$$\int_\gamma f(z)dz = g(z)|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0. \ \blacksquare$$

Exerciţiul 1.17 Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} = \{\dots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ atunci

$$\int_\gamma z^k \, dz = 0$$

dar

$$\int_\gamma z^{-1} \, dz = \int_\gamma \frac{1}{z} \, dz = 2\pi \mathrm{i}.$$

b) Să se arate că

$$\int_\gamma \left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 \, z + a_2 \, z^2 \right) dz = 2\pi \mathrm{i} a_{-1}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conţinut în mulţimea deschisă $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ şi funcţia

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^k$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$.
b) Utilizând direct definiţia integralei complexe obţinem

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \, \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \, \mathrm{i} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, dt = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \mathrm{i}.$$

Observaţia 1.21 Din exerciţiul anterior rezultă că funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z}$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C}^*$.

Exerciţiul 1.18 Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ atunci

$$\int_\gamma (z - z_0)^k \, dz = 0$$

dar

$$\int_\gamma (z - z_0)^{-1} \, dz = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz = 2\pi\mathrm{i}.$$

b) Să se arate că

$$\int_\gamma \left(\frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1\,(z - z_0) + a_2\,(z - z_0)^2 \right) dz = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conţinut în mulţimea deschisă $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ şi funcţia

$$f : \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = (z - z_0)^k$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k + 1}$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$.
b) Utilizând direct definiţia integralei complexe obţinem

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \, \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \, \mathrm{i}\, r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, dt = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

Observaţia 1.22 Din exerciţiul anterior rezultă că funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = (z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$.

Definiţia 1.31 *Spunem că mulţimea $D \subseteq \mathbb{C}$ este* conexă *(prin drumuri) dacă oricare ar fi punctele z_1, z_2 din D există un drum conţinut în D cu originea z_1 şi extremitatea z_2. O mulţime deschisă şi conexă este numită* domeniu.

Figura 1.9

Exemplul 1.19 Mulţimea $B_1(0) \cup B_1(-1+\mathrm{i}\sqrt{2})$ este domeniu dar $B_1(0) \cup B_1(2+\mathrm{i})$ nu este domeniu (a se vedea figura 1.9).

Observaţia 1.23 Ştim că orice drum $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ este echivalent cu drumul

$$[0,1] \longrightarrow D : \ t \mapsto \gamma((1-t)a + tb).$$

Fără a reduce generalitatea, putem utiliza doar drumuri definite pe intervalul $[0,1]$.

Definiţia 1.32 *Spunem că drumurile cu aceleaşi extremităţi γ_0 şi γ_1 sunt* omotope în *domeniul D dacă sunt conţinute în D şi se pot deforma continuu unul în celălalt fără a ieşi din D, adică dacă există o aplicaţie continuă*

$$h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D : (s,t) \mapsto h(s,t)$$

astfel încât urmatoarele condiţii să fie îndeplinite

a) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, *oricare ar fi* $t \in [0,1]$,
b) $h(1,t) = \gamma_1(t)$, *oricare ar fi* $t \in [0,1]$,
c) $h(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, *oricare ar fi* $s \in [0,1]$,
d) $h(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, *oricare ar fi* $s \in [0,1]$.

Figura 1.10

Exemplul 1.20 Drumurile $\gamma_0,\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \qquad \gamma_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$$

sunt omotope în $D = \mathbb{C}\backslash \bar{B}_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})$. In acest caz putem alege (a se vedea figura 1.11).

$$h(s,t) = (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t).$$

Figura 1.11

Observaţia 1.24 In continuare, pentru a decide dacă două drumuri sunt omotope în raport cu anumit domeniu ne vom rezuma la a analiza vizual figura (!).

Exemplul 1.21 Drumul circular

$$\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_0(t) = 3\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} = 3\cos 2\pi t + 3\mathrm{i}\sin 2\pi t$$

este omotop în $\mathbb{C}^*$ cu drumul eliptic

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_1(t) = 3\cos 2\pi t + \mathrm{i}\sin 2\pi t$$

dar cele două drumuri nu sunt omotope în $D = \mathbb{C}\backslash\{2\mathrm{i}\}$ (a se vedea figura 1.12).

Figura 1.12

Exemplul 1.22 Drumurile $\gamma_0,\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = 1 - 2t, \qquad \gamma_1(t) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$$

sunt omotope în $\mathbb{C}$, dar nu sunt omotope în $\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{2}\mathrm{i}\}$ (a se vedea figura 1.13).

Figura 1.13

Definiţia 1.33 *Spunem că drumul închis*

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

este omotop cu zero în D *dacă el este omotop în D cu drumul punctual*

$$[a, b] \longrightarrow D : \ t \mapsto \gamma(a).$$

Figura 1.14

Exemplul 1.23 Drumul circular

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$$

este omotop cu zero în $D = \mathbb{C} \backslash \{2\mathrm{i}\}$, dar nu este omotop cu zero în $\mathbb{C}^*$.

Figura 1.15

Teorema 1.34 *(Cauchy) Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă,*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie olomorfă şi

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum închis omotop cu zero în D atunci

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Propoziţia 1.35 *Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă,*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie olomorfă şi

$$\gamma_0 : [a, b] \longrightarrow D, \qquad \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow D$$

sunt două drumuri omotope în D atunci

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz. \tag{1.1}$$

Figura 1.16

Demonstraţie. Drumul obţinut compunând γ_0 cu inversul $\tilde{\gamma}_1$ al drumului γ_1 este un drum închis omotop cu zero în D. Utilizând teorema Cauchy obţinem relaţia

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)\,dz = 0.$$

echivalentă cu (1.1). ▪

Observaţia 1.25 Fie k un număr întreg pozitiv. Drumul

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z_0 + \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}t}$$

se roteşte de k ori în jurul lui z_0 în sens direct şi

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = k.$$

Drumul

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = z_0 + \mathrm{e}^{-2k\pi \mathrm{i}t}$$

se roteşte de k ori în jurul lui z_0 în sens invers şi

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = -k.$$

Figura 1.17

Drumul γ din figura 1.17 este omotop în $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ cu drumul

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_1(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i}t}$$

şi prin urmare

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2.$$

In general, dacă γ este un drum închis care nu trece prin z_0 numărul

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz$$

numit *indexul* lui γ faţă de z_0, ne arată de câte ori se roteşte γ în jurul lui z_0. O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Teorema 1.36 *(Formulele lui Cauchy) Orice funcţie olomorfă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe o mulţime deschisă D este nelimitat derivabilă şi oricare ar fi drumul

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow D$$

omotop cu zero în D are loc formula

$$n(\gamma, z)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $z \in D\backslash\{\ \gamma(t)\ |\ \ t \in [0,1]\ \}$.

O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Figura 1.18

Observaţia 1.26 Programul MATHEMATICA permite reprezentarea grafică a drumurilor şi calculul direct al integralelor complexe pe drumuri poligonale.

1.4 Serii Laurent

Definiţia 1.37 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime şi*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Spunem că seria de funcţii complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este convergentă *(*uniform convergentă*) dacă şirul sumelor parţiale $(s_k)_{k\geq 0}$, unde*

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$$

este convergent (respectiv, uniform convergent). Limita acestui şir

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n = \lim_{k\to\infty} (f_0 + f_1 + \cdots f_k)$$

se numeşte suma seriei*. Spunem că seria considerată este* absolut convergentă *dacă seria de funcţii reale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

este convergentă.

Propoziţia 1.38 *Dacă z este astfel încât $|z| < 1$ atunci seria geometrică*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

este convergentă şi suma ei este $\frac{1}{1-z}$, adică

$$|z| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Demonstraţie. Dacă $|z| < 1$ atunci

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} z^n = \lim_{k\to\infty}(1+z+z^2+\cdots+z^k) = \lim_{k\to\infty}\frac{1-z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}. \blacksquare$$

Teorema 1.39 *(Weierstrass) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulţime şi*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Dacă există o serie convergentă de numere reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

astfel încât

$$|f_n(z)| \leq \alpha_n, \qquad oricare\ ar\ fi\ \ z \in D,\ n \in \mathbb{N}$$

atunci seria de funcţii complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este absolut şi uniform convergentă.

Definiţia 1.40 *Prin* serie de puteri *în jurul lui z_0 se înţelege o serie de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

cu coeficienţii a_0, a_1, a_2 ,... numere complexe. Ea mai poate fi scrisă şi sub forma

$$a_0 + a_1\,(z-z_0) + a_2\,(z-z_0)^2 + \cdots\ .$$

Observaţia 1.27 Orice serie de puteri este o serie de funcţii

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

în care funcţiile f_n au forma particulară

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = a_n\,(z-z_0)^n.$$

Definiţia 1.41 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Spunem că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform pe compacte *la f dacă oricare ar fi mulţimea compactă $K \subset D$, şirul restricţiilor $(f_n|_K)$ converge uniform la $f|_K$.*

Teorema 1.42 *(Weierstrass) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

funcţii definite pe D. Dacă funcţiile f_n sunt olomorfe şi dacă şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform pe compacte la f atunci f este funcţie olomorfă şi

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}, \qquad oricare\ ar\ fi\ k \in \mathbb{N}.$$

O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Teorema 1.43 *(Weierstrass) Dacă seria de funcţii olomorfe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge uniform pe compacte în mulţimea deschisă D atunci suma ei

$$S : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

este o funcţie olomorfă şi

$$S^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}, \qquad oricare\ ar\ fi\ k \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă direct din teorema precedentă. ▪

Teorema 1.44 *(Abel) Dacă seria de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

este convergentă pentru $z = z_1 \neq z_0$ atunci ea este convergentă în discul

$$\{\ z\ |\ |z - z_0| < |z_1 - z_0|\ \}$$

de centru z_0 şi rază $|z_1 - z_0|$.

Demonstraţie. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ fiind convergentă avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$$

şi prin urmare există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|a_n\,(z_1 - z_0)^n| < 1, \qquad \text{oricare ar fi} \;\; n \geq n_0$$

adică

$$|a_n| < \frac{1}{|z_1 - z_0|^n}, \qquad \text{oricare ar fi} \;\; n \geq n_0.$$

Din relaţia

$$|a_n\,(z - z_0)^n| < \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^n, \qquad \text{oricare ar fi} \;\; n \geq n_0$$

şi convergenţa seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^n$$

pentru $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ rezultă conform criteriului comparaţiei convergenţa seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\,(z - z_0)^n|$. Spaţiul normat $(\mathbb{C}, |\ |)$ fiind complet, orice serie absolut convergentă este convergentă. ∎

Observaţia 1.28 Fie seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n.$$

Pentru z astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} < 1$$

adică astfel încât

$$|z - z_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

seria considerată este absolut convergentă conform criteriului rădăcinii.

Teorema 1.45 *(Cauchy-Hadamard) In cazul unei serii de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

există

$$R = \begin{cases} 0 & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \notin \{0, \infty\} \\ \infty & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

(numit raza de convergenţă*) astfel încât :*

a) In discul (numit disc de convergenţă*)*

$$B_R(z_0) = \{\ z \mid \ |z - z_0| < R\}$$

seria converge absolut şi uniform pe compacte.

b) In $\mathbb{C}\backslash \bar{B}_R(z_0) = \{\ z \mid \ |z - z_0| > R\}$ *seria este divergentă.*

c) Suma seriei

$$S : B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

este funcţie olomorfă

d) Seria derivată este o serie de puteri cu aceeaşi rază de convergenţă şi

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \qquad \textit{oricare ar fi } k \in B_R(z_0).$$

O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Observaţia 1.29 Se poate arăta că dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

atunci

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Exemplul 1.24
a) Raza de convergenţă a seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

este $R = 1$ deoarece în acest caz $a_n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
b) Raza de convergenţă a seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

este $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$.

Observaţia 1.30 Admiţând că f este suma unei serii de puteri în jurul lui z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu raza de convergenţă nenulă, din teorema Cauchy-Hadamard rezultă relaţia

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (z - z_0)^n]^{(k)}, \qquad \text{oricare ar fi} \;\; k \in \mathbb{N}$$

care conduce la

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Teorema 1.46 *(Dezvoltarea în serie Taylor) Dacă funcţia*

$$f : B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este olomorfă în discul $B_r(z_0)$ şi R este raza de convergenţă a seriei Taylor asociate

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

atunci $R \geq r$ şi

$$\begin{aligned} f(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

oricare ar fi $z \in B_r(z_0)$.

O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Exemplul 1.25 Din teorema dezvoltarii în serie Taylor rezultă dezvoltările

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \qquad \text{pentru orice} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \qquad \text{pentru orice} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Din aceste dezvoltări, prin substituţie şi/sau derivare putem obţine alte dezvoltări

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{n-1} z^{n-1} = 1 - 2z + 3z^2 - \cdots \qquad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad \text{pentru orice} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definiţia 1.47 *Prin* serie Laurent *în jurul lui z_0 se înţelege o serie de forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coeficienţii a_n numere complexe. Ea mai poate fi scrisă şi sub forma

$$\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \; .$$

Teorema 1.48 *(Coroana de convergenţă) Fie seria Laurent*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

$$r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

şi

$$R = \begin{cases} 0 & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \notin \{0,\infty\} \\ \infty & \textit{daca} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Dacă $r < R$ atunci:

a) In coroana circulară (numită coroana de convergenţă*)*

$$\{\ z \mid \ r < |z-z_0| < R\ \}$$

seria Laurent converge absolut şi uniform pe compacte.

b) Seria Laurent diverge în $\{\ z \mid \ |z-z_0| < r\ \} \cup \{\ z \mid \ |z-z_0| > R\ \}$.

c) Suma seriei Laurent $S : D \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

este funcţie olomorfă.

O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Figura 1.19

Teorema 1.49 *(Dezvoltarea în serie Laurent). Dacă funcţia*

$$f : D = \{\ z\ |\ \ r < |z - z_0| < R\ \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe coroana D este olomorfă atunci exista o unică serie Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

cu coroana de convergenţă incluzând pe D şi astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \qquad \text{oricare ar fi} \quad z \in D.$$

Exemplul 1.26

a) Funcţia olomorfă

$$f : D = \{\ z\ |\ \ 0 < |z| < 1\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}(1 + z + z^2 + \cdots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots \tag{1.2}$$

b) Funcţia olomorfă

$$f : D = \{\ z\ |\ \ 0 < |z - \mathrm{i}| < \infty\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui i

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2} = \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{(z-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{e}^{z-\mathrm{i}} = \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{(z-\mathrm{i})^2}\left(1 + \tfrac{z-\mathrm{i}}{1!} + \tfrac{(z-\mathrm{i})^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{(z-\mathrm{i})^2} + \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{z-\mathrm{i}} + \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2!} + \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{3!}(z-\mathrm{i}) + \cdots \end{aligned} \tag{1.3}$$

c) Funcţia olomorfă

$$f : D = \{\ z\ |\ \ 0 < |z| < \infty\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = z^2\left(1 + \tfrac{1}{1!}\,\tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{2!}\,\tfrac{1}{z^2} + \cdots\right) \\ &= \cdots + \tfrac{1}{4!}\,\tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{3!}\,\tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{1!}\,z + z^2 + 0\,z^3 + 0\,z^4 + \cdots \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definiţia 1.50 *Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă definită pe mulţimea deschisă D. Spunem că punctul $z_0 \in \mathbb{C}\backslash D$ este un* punct singular izolat *al funcţiei f dacă există $r > 0$ astfel încât coroana circulară $\{\ z\ |\ \ 0 < |z - z_0| < r\,\}$ este conţinută în D. Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea Laurent*

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1\,(z-z_0) + a_2\,(z-z_0)^2 + \cdots\ .$$

a lui f în acestă coroană se numeşte reziduul *lui f în punctul singular izolat z_0 şi se notează cu $\mathbf{Rez}_{z_0}f$, adică*

$$\mathbf{Rez}_{z_0}f = a_{-1}.$$

Exemplul 1.27

a) Singurul punct singular izolat al funcţiei

$$f : D = \{\ z\ |\ \ 0 < |z| < 1\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

este $z = 0$ şi din (1.2) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 = 1$.

b) Singurul punct singular izolat al funcţiei

$$f : D = \{\ z\ |\ \ 0 < |z - \mathrm{i}| < \infty\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}$$

este $z = i$ şi din (1.3) rezultă că $\mathbf{Rez}_i f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}}$.

c) Singurul punct singular izolat al funcţiei

$$f : D = \{\ z\ |\ \ 0 < |z| < \infty\ \} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$$

este $z = 0$ şi din (1.4) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Definiţia 1.51 *Fie D o mulţime deschisă şi*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

o funcţie olomorfă. Prin zero multiplu de ordinul n *al lui f se înţelege un punct $z_0 \in D$ astfel încât*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \qquad si \qquad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Spunem despre un punct singular izolat z_0 al lui f că este pol de ordinul n *dacă este un zero multiplu de ordinul n pentru funcţia* $\frac{1}{f}$.

Teorema 1.52 *Dacă punctul singular izolat z_0 al funcţiei olomorfe $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este un pol de ordinul n atunci există $r > 0$ astfel încât coroana circulară*

$$\{\ z \mid 0 < |z - z_0| < r\ \}$$

este conţinută în D şi în acestă coroană f admite o dezvoltare Laurent de forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1\,(z - z_0) + a_2\,(z - z_0)^2 + \cdots$$

Observaţia 1.31

a) Dacă z_0 este un pol simplu atunci în jurul lui z_0 funcţia f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1\,(z - z_0) + a_2\,(z - z_0)^2 + \cdots$$

Inmulţind cu $(z - z_0)$ obţinem relaţia

$$(z - z_0)\,f(z) = a_{-1} + a_0\,(z - z_0) + a_1\,(z - z_0)^2 + a_2\,(z - z_0)^3 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\,f(z).$$

b) Dacă z_0 este un pol dublu atunci în jurul lui z_0 funcţia f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1\,(z - z_0) + a_2\,(z - z_0)^2 + \cdots$$

Inmulţind cu $(z - z_0)^2$ şi apoi derivând obţinem relaţia

$$[(z - z_0)^2\,f(z)]' = a_{-1} + 2a_0\,(z - z_0) + 3a_1\,(z - z_0)^2 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z\to z_0} [(z - z_0)^2 \, f(z)]'.$$

c) Dacă z_0 este un pol triplu atunci în jurul lui z_0 funcţia f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 \,(z - z_0) + \cdots$$

Inmulţind cu $(z - z_0)^3$ şi apoi derivând de două ori obţinem relaţia

$$[(z - z_0)^3 \, f(z)]'' = 2! \, a_{-1} + 6a_0 \,(z - z_0) + 12a_1 \,(z - z_0)^2 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to z_0} [(z - z_0)^3 \, f(z)]''.$$

d) Dacă z_0 este un pol de ordinul n atunci

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} [(z - z_0)^n \, f(z)]^{(n-1)}.$$

Exemplul 1.28 Funcţia

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0,\,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

are două puncte singulare izolate $z = 0$ şi $z = 1$. Punctul $z = 0$ este pol dublu şi

$$\mathbf{Rez}_0 f = \lim_{z\to 0} [z^2 \, f(z)]' = \lim_{z\to 0} \left[\frac{1}{1-z}\right]' = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(1-z)^2} = 1. \tag{1.5}$$

Punctul $z = 1$ este pol simplu şi

$$\mathbf{Rez}_1 f = \lim_{z\to 1} (z - 1) \, f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{-1}{z^2} = -1. \tag{1.6}$$

Observaţia 1.32 Programul MATHEMATICA oferă importante facilităţi privind dezvoltarea în serie Laurent şi calculul reziduurilor.

1.5 Calculul integralelor cu ajutorul reziduurilor

Observaţia 1.33 Dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$$

este un drum închis care nu trece prin z_0 atunci

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\gamma \left(\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 \right) dz \\ &\qquad\qquad = a_{-1} \textstyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi \mathrm{i} a_{-1}\, n(\gamma, z_0) \end{aligned} \tag{1.7}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2},\ a_{-1},\, a_0,\, a_1,\, a_2 \in \mathbb{C}$. Punctul z_0 este un punct singular izolat (pol de ordinul al doilea) pentru funcţia $f : \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2$$

şi $\mathrm{Rez}_{z_0} f = a_{-1}$. Relaţia (1.7) se mai poate scrie

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i}\ n(\gamma, z_0)\ \mathbf{Rez}_{z_0} f.$$

Teorema 1.53 *(Teorema reziduurilor). Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă,*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcţie olomorfă , S este mulţimea punctelor singulare izolate ale lui f şi dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum omotop cu zero în $\tilde{D} = D \cup S$ atunci

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{z\in S} n(\gamma, z)\, \mathbf{Rez}_z f.$$

O demonstraţie poate fi găsită în [4].

Exerciţiul 1.29 Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{4\, dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2}$$

unde

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}.$$

Rezolvare. Considerăm $D = \mathbb{C}\backslash\{3,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$ şi funcţia olomorfă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{4}{(z^2+1)(z-3)^2}.$$

Mulţimea punctelor singulare izolate ale lui f este $S = \{3,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$ şi drumul γ este omotop cu zero în $D \cup S = \mathbb{C}$. Conform teoremei reziduurilor avem

$$\int_\gamma \frac{4\,dz}{(z^2+1)(z-3)^2} = 2\pi\mathrm{i}\,(n(\gamma,3)\,\mathbf{Rez}_3 f + n(\gamma,\mathrm{i})\,\mathbf{Rez}_\mathrm{i} f + n(\gamma,-\mathrm{i})\,\mathbf{Rez}_{-\mathrm{i}} f)\,.$$

Figura 1.20

Deoarece drumul γ (figura 1.20) se roteşte de zero ori în jurul lui 3 şi o singură dată în jurul lui i şi $-$i rezultă că

$$n(\gamma,3) = 0, \qquad n(\gamma,\mathrm{i}) = n(\gamma,-\mathrm{i}) = 1$$

şi prin urmare

$$\int_\gamma \frac{4\,dz}{(z^2+1)(z-3)^2} = 2\pi\mathrm{i}\,(\mathbf{Rez}_\mathrm{i} f + \mathbf{Rez}_{-\mathrm{i}} f)\,.$$

Punctele singulare i şi $-$i fiind poli simpli avem

$$\mathbf{Rez}_\mathrm{i} f = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{4}{(z-3)^2(z+\mathrm{i})} = \frac{4}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-3)^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}$$

$$\mathbf{Rez}_{-\mathrm{i}}f = \lim_{z\to -\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to -\mathrm{i}}\frac{4}{(z-3)^2(z-\mathrm{i})} = \frac{4}{-2\mathrm{i}(\mathrm{i}+3)^2} = \frac{3}{25}+\frac{4}{25}\mathrm{i}$$

şi

$$\int_\gamma \frac{4\,dz}{(z^2+1)(z-3)^2} = \frac{12}{25}\pi\mathrm{i}.$$

Exerciţiul 1.30 Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\,dz$$

unde

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}t}.$$

Rezolvare. Considerăm funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe mulţimea deschisă $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Punctul singular $z = 0$ este un pol de ordinul al treilea. Pentru calculul reziduului lui f în 0 putem utiliza dezvoltarea Laurent în jurul lui 0

$$f(z) = \tfrac{\mathrm{e}^z}{z^3} = \tfrac{1}{z^3}\left(1+\tfrac{z}{1!}+\tfrac{z^2}{2!}+\tfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$= \tfrac{1}{z^3}+\tfrac{1}{1!}\tfrac{1}{z^2}+\tfrac{1}{2!}\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}z+\cdots$$

sau relaţia

$$\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(z^3\,f(z))'' = \frac{1}{2}.$$

Observând că γ se roteşte de două ori în jurul lui 0 în sens invers sau utilizând formula

$$n(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z} = -2$$

obţinem

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,n(\gamma,0)\,\mathbf{Rez}_0 f = -2\pi\mathrm{i}.$$

Exerciţiul 1.31 Să se calculeze integrala

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\,dz$$

unde γ este drumul din figura 1.21.

Figura 1.21

Rezolvare. Funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

are punctele singulare $z = 0$ şi $z = 1$. Ştim că $\mathbf{Rez}_0 f = 1$ (a se vedea relaţia (1.5))şi $\mathbf{Rez}_1 f = -1$ (a se vedea relaţia (1.6)). Deoarece drumul γ se roteşte de două ori în jurul lui 0 şi o dată în jurul lui 1, din teorema reziduurilor rezultă că

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\, dz = 2\pi\mathrm{i}\,(2\,\mathbf{Rez}_0 f + \mathbf{Rez}_1 f) = 2\pi\mathrm{i}.$$

Exerciţiul 1.32 Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t}\, dt \qquad \text{unde} \quad a \in (1,\infty).$$

Rezolvare. Integrala reală cerută poate fi privită ca o integrală în planul complex şi calculată folosind teorema reziduurilor. Avem

$$\begin{aligned} I = \textstyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \frac{2}{2a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})'\, dt \\ = -\mathrm{i} \textstyle\int_\gamma \frac{1}{z} \frac{2}{2a+z+\frac{1}{z}}\, dz = -\mathrm{i} \int_\gamma \frac{2}{z^2+2az+1} dz. \end{aligned}$$

unde $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Funcţia

$$f : \mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{2}{z^2+2az+1}$$

unde

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \qquad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

sunt rădăcinile polinomului $z^2 + 2az + 1$, are două puncte singulare izolate (poli simpli) z_1 şi z_2.

Figura 1.22

Deoarece z_1, z_2 sunt numere reale, $-1 < z_1 < 0$ şi $z_2 < -1$ rezultă că $n(\gamma, z_1) = 1$ şi $n(\gamma, z_2) = 0$ (a se vedea figura 1.22). Conform teoremei reziduurilor

$$I = -\mathrm{i} \int_\gamma \frac{2}{z^2+2az+1} dz = 2\pi \mathbf{Rez}_{z_1} f = 2\pi \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z)$$

$$= 2\pi \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Figura 1.23

Propoziţia 1.54 *Fie $\alpha < \beta$ şi o funcţie continuă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe un domeniu D ce conţine imaginile drumurilor (a se vedea figura 1.23)

$$\gamma_r : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

oricare ar fi $r \in (0, \infty)$. Dacă

$$\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$$

atunci

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 0.$$

Demonstraţie. Din relaţia $\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$ rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $r_\varepsilon \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|z| > r_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |z\, f(z)| < \varepsilon.$$

In particular, pentru $r > r_\varepsilon$ avem

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, r\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, r\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\, dt < \varepsilon \int_\alpha^\beta dt = (\beta - \alpha)\varepsilon. \blacksquare$$

Observaţia 1.34 Oricare ar fi z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ au loc relaţiile

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \qquad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_1|$$

care conduc la

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

adică la

$$|\, |z_1| - |z_2|\, | \leq |z_1 - z_2|.$$

Exerciţiul 1.33 Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

Rezolvare. Integrala I este o integrală reală improprie. Intervalul de integrare este nemărginit dar funcţia considerată este mărginită, numitorul neanulându-se pe axa reală. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

integralele

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx, \qquad si \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

au aceeaşi natură. Ştim însă că integrala improprie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx$$

este convergentă pentru $\lambda > 1$. Rezultă astfel că integrala considerată

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx + \int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

este convergentă.

Figura 1.24

Pentru a calcula valoarea integralei vom considera funcţia olomorfă

$$f : \mathbb{C}\backslash\{-2\mathrm{i},\, -\mathrm{i},\, \mathrm{i},\, 2\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

şi drumul de integrare din figura 1.24 compus din

$$\gamma_r : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

şi

$$\gamma : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = t.$$

Conform teoremei reziduurilor, oricare ar fi $r > 2$ avem relaţia

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi \mathrm{i}\,(\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} f + \mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} f)$$

care conduce la

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi \mathrm{i}\,(\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} f + \mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} f). \tag{1.8}$$

Deoarece

$$|z\,f(z)| = \frac{|z^3|}{|z^2+1| \cdot |z^2+4|} = \frac{|z^3|}{|z^2-(-1)| \cdot |z^2-(-4)|} =\leq \frac{|z|^3}{|\,|z|^2-1| \cdot |\,|z|^2-4|}$$

avem

$$\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$$

şi în virtutea propoziţiei 1.54

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

Din relaţia (1.8), ţinând seama şi de faptul că $f(-x) = f(x)$, rezultă

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \pi \mathrm{i}\,(\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} f + \mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} f).$$

Dar

$$\mathbf{Rez}_{\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}} (z-\mathrm{i})\,f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)} = \frac{\mathrm{i}}{6}$$

$$\mathbf{Rez}_{2\mathrm{i}} = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} (z-2\mathrm{i})\,f(z) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2\mathrm{i})} = -\frac{\mathrm{i}}{3}$$

şi deci

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \pi \mathrm{i} \left(\frac{\mathrm{i}}{6} - \frac{\mathrm{i}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Exerciţiul 1.34 Să se arate că

$$1 \geq \frac{\sin t}{t} \geq \frac{2}{\pi} \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rezolvare. Funcţia

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$$

este descrescătoare deoarece

$$\varphi'(t) = \frac{t\,\cos t - \sin t}{t^2} \leq 0.$$

Figura 1.25

Propoziţia 1.55 *(Lema lui Jordan). Dacă funcţia continuă*

$$f : \{\ z = x + y\mathrm{i} \mid \ y \geq 0\ \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este astfel încât

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0 \tag{1.9}$$

şi

$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

(a se vedea figura 1.25) atunci

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,dz = 0$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Din relaţia (1.9) rezultă că există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$r > r_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| < \frac{2\varepsilon}{\pi}$$

şi

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(\cos t+\mathrm{i}\sin t)}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt\right|$$

$$\leq \int_0^\pi |f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{e}^{-r\sin t}\,r\,dt \leq \tfrac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin t}\,dt$$

$$\leq \tfrac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\frac{2}{\pi}t}\,dt = \tfrac{2\varepsilon}{\pi} r\, \tfrac{-\pi}{2r}\,\mathrm{e}^{-r\frac{2}{\pi}t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \varepsilon(1-\mathrm{e}^{-r}) \leq \varepsilon. \ \blacksquare$$

Figura 1.26

Exerciţiul 1.35 Să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(integrala Poisson)} \tag{1.10}$$

Rezolvare. Fie $0 < r < R$ şi drumurile (a se vedea figura 1.26)

$$\gamma_R : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

$$\gamma_r : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-t)}.$$

Din teorema reziduurilor (sau teorema Cauchy) rezultă relaţia

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,dx + \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,dx = 0$$

care se mai poate scrie

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\,dx = 0$$

sau

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}{z}\,dz + 2\mathrm{i}\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = 0$$

Utilizând relaţia

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,dz = -\pi\mathrm{i}$$

şi notând cu g o primitivă a funcţiei $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}{z}$ obţinem

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz - \pi\mathrm{i} + (g(r) - g(-r)) + 2\mathrm{i}\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = 0.$$

Deoarece conform lemei lui Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = 0$$

pentru $R \to \infty$ şi $r \to 0$ obţinem relaţia

$$2\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\mathrm{i}.$$

Definiţia 1.56 *Fie* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. *Funcţia*

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)dx$$

(în cazul în care există) se numeşte transformata Fourier *a lui* φ.

Exerciţiul 1.36 Să se arate că

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Avem

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2+\mathrm{i}\xi x}dx = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(x-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2}dx.$$

Plecând de la integrala

$$\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2}dt + \int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2}dz - \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2}dz + \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{-r} \mathrm{e}^{-az^2}dz = 0$$

a funcţiei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^{-az^2}$$

de-a lungul drumului dreptunghiular din figura 1.27 arătăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Avem

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} dt.$$

Alegând pentru drumul liniar ce uneşte r cu $r - \mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_1(t) = r - \mathrm{i}t\frac{\xi}{2a}$$

obţinem relaţia

$$\int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz = \int_0^1 \mathrm{e}^{-a\left(r-\mathrm{i}t\frac{\xi}{2a}\right)^2} (-\mathrm{i})\frac{\xi}{2a} dt = -\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\, \mathrm{e}^{-ar^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}rt\xi + \frac{t^2\xi^2}{4a}} dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r\to\infty} \int_{r}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz = 0.$$

Figura 1.27

Similar se arată că

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{-r} \mathrm{e}^{-az^2} dz = 0$$

Alegând pentru drumul liniar ce uneşte $-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ cu $r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_2 : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \gamma_2(t) = t - \mathrm{i}\frac{\xi}{2a}$$

obţinem relaţia

$$\int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz = \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2} dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}}^{r-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(t-\mathrm{i}\frac{\xi}{2a}\right)^2} dt.$$

Capitolul 2

Tensori

2.1 Dualul unui spaţiu vectorial

Propoziţia 2.1 *Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ atunci*

$$V^* = \{\,\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y),\ \forall x, y \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,\}$$

înzestrat cu operaţiile de adunare

$$V^* \times V^* \longrightarrow V^* :\ (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi \qquad \textit{unde} \quad \begin{array}{l} \varphi + \psi : V \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \end{array}$$

şi înmulţire cu scalari

$$\mathbb{K} \times V^* \longrightarrow V^* :\ (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda\varphi \qquad \textit{unde} \quad \begin{array}{l} \lambda\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda\varphi)(x) = \lambda\,\varphi(x) \end{array}$$

este spaţiu vectorial (numit dualul *lui V).*

Notaţie. Pentru a simplifica scrierea unor expresii vom utiliza uneori indici superiori pentru a indexa coordonatele vectorilor. Dezvoltarea

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n$$

a unui vector $x \in V$ în raport cu baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ se scrie comprimat folosind convenţia de sumare a lui Einstein

$$x = x^i e_i$$

(indicele i care apare în produsul $x^i e_i$ o dată ca indice superior şi o dată ca indice inferior este indice de sumare).

Teorema 2.2 *Oricare ar fi spaţiul vectorial V avem*

$$\dim V^* = \dim V.$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază a lui V. Arătăm că $\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$, unde

$$e^i : V \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & daca \quad i = j \\ 0 & daca \quad i \neq j \end{cases}$$

adică

$$e^i : V \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad e^i(x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n) = x^i$$

este o bază a lui V^*, numită *duala* bazei $\mathcal{B}$.
$\mathcal{B}^*$ *este sistem de vectori liniar independenţi.* Fie

$$\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_n e^n = 0$$

adică

$$(\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_n e^n)(x) = 0, \qquad \forall x \in V$$

ceea ce se mai scrie

$$\alpha_1 e^1(x) + \alpha_2 e^2(x) + \cdots + \alpha_n e^n(x) = 0, \qquad \forall x \in V.$$

Alegând $x = e_1$ obţinem $\alpha_1 = 0$, alegând $x = e_2$ obţinem $\alpha_2 = 0$, etc.
$\mathcal{B}^*$ *este sistem de generatori.* Dacă $\varphi \in V^*$ atunci notând $\varphi_i = \varphi(e_i)$ obtinem

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n) = x^1\, \varphi(e_1) + x^2\, \varphi(e_2) + \cdots + x^n\, \varphi(e_n) \\ &= e^1(x)\, \varphi_1 + e^2(x)\, \varphi_2 + \cdots + e^n(x)\, \varphi_n = (\varphi_1 e^1 + \varphi_2 e^2 + \cdots + \varphi_n e^n)(x) \end{aligned}$$

oricare ar fi $x \in V$, adică

$$\varphi = \varphi_1 e^1 + \varphi_2 e^2 + \cdots + \varphi_n e^n = \varphi_i e^i. \ \blacksquare$$

2.2 Tensori

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ şi fie două baze ale lui V

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \qquad \text{(baza } \textit{veche}\text{)}$$
$$\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\} \qquad \text{(baza } \textit{noua}\text{)}$$

şi

$$\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$$
$$\mathcal{B}'^* = \{e'^1, e'^2, ..., e'^n\}$$

dualele lor. Fiecare vector $x \in V$ se poate dezvolta în raport cu cele două baze

$$x = x^i\, e_i = x'^j\, e'_j$$

şi am arătat că

$$x^i = e^i(x), \qquad x'^j = e'^j(x).$$

Similar, fiecare element $\varphi \in V^*$ admite dezvoltările

$$\varphi = \varphi_i\, e^i = \varphi'_j\, e'^j$$

şi

$$\varphi_i = \varphi(e_i), \qquad \varphi'_j = \varphi(e'_j).$$

Utilizând un indice inferior si unul superior pentru elementele matricei de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ relaţiile

$$e'_1 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \cdots + \alpha_1^n e_n = \alpha_1^i e_i$$
$$e'_2 = \alpha_2^1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \cdots + \alpha_2^n e_n = \alpha_2^i e_i$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e'_n = \alpha_n^1 e_1 + \alpha_n^2 e_2 + \cdots + \alpha_n^n e_n = \alpha_n^i e_i$$

se scriu comprimat

$$e'_i = \alpha_i^j e_j$$

iar matricea de trecere este

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 2.3 *Matricea S este inversabilă şi inversa ei*

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}$.

Demonstraţie. Fie $e_j = \beta_j^k \, e'_k$. Din relaţiile

$$e_j = \beta_j^k \, e'_k = \beta_j^k \, \alpha_k^i \, e_i, \qquad e'_i = \alpha_i^j \, e_j = \alpha_i^j \, \beta_j^k \, e'_k$$

rezultă ţinând seama de unicitatea reprezentării unui vector în raport cu o bază că

$$\beta_j^k \alpha_k^i = \delta_j^i, \qquad \alpha_i^j \beta_j^k = \delta_i^k. \; \blacksquare \tag{2.1}$$

Teorema 2.4 *Cu notaţiile de mai sus*

$$\left.\begin{array}{l} e'_i = \alpha_i^j \, e_j \\ x = x^j \, e_j = x'^i \, e'_i \\ \varphi = \varphi_j \, e^j = \varphi'_i \, e'^i \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x'^i = \beta_j^i \, x^j \\ e'^i = \beta_j^i \, e^j \\ \varphi'_i = \alpha_i^j \, \varphi_j \end{array}\right.$$

Demonstraţie. Din relaţia

$$x^j \, e_j = x'^i \, e'_i = x'^i \, \alpha_i^j \, e_j$$

rezultă

$$x^j = \alpha_i^j \, x'^i$$

şi ţinând seama de (2.1)

$$\beta_j^k\, x^j = \beta_j^k\, \alpha_i^j\, x'^i = \delta_i^k\, x'^i = x'^k$$

adică

$$x'^k = \beta_j^k\, x^j.$$

Deoarece $x'^k = e'^k(x)$ şi $x^j = e^j(x)$ relaţia anterioară se poate scrie sub forma

$$e'^k(x) = \beta_j^k\, e^j(x)$$

sau

$$e'^k(x) = (\beta_j^k\, e^j)(x).$$

Relaţia având loc pentru oricare $x \in V$ rezultă

$$e'^k = \beta_j^k\, ej.$$

Folosind liniaritatea lui φ obţinem

$$\varphi'_i = \varphi(e'_i) = \varphi(\alpha_i^j\, e_j) = \alpha_i^j \varphi(e_j) = \alpha_i^j\, \varphi_j. \ \blacksquare$$

Observaţia 2.1 Coordonatele *noi* x'^i ale unui vector $x \in V$ se exprimă cu ajutorul coordonatelor vechi x^j prin formula $x'^i = \beta_j^i\, x^j$ similară cu formula $e'^i = \beta_j^i\, e^j$ de schimbare a bazei duale. Formula $\varphi'_i = \alpha_i^j\, \varphi_j$ este similară cu $e'_i = \alpha_i^j\, e_j$.

Observaţia 2.2 Vectorii $x \in V$ sunt obiecte matematice care în raport cu fiecare bază $\mathcal{B}$ a lui V sunt descrise prin coordonatele x^1, x^2, ..., x^n şi care la o schimbare de bază $e'_i = \alpha_i^j\, e_j$ se schimbă după formula

$$x'^i = \beta_j^i\, x^j.$$

Similar, elementele $\varphi \in V^*$ (numite *forme liniare* sau *1-forme*) sunt obiecte matematice care in raport cu fiecare bază $\mathcal{B}^*$ sunt descrise prin coordonatele φ_1, φ_2, ..., φ_n şi care la o schimbare de bază $e'_i = \alpha_i^j\, e_j$ se schimbă după formula

$$\varphi'_i = \alpha_i^j\, \varphi_j.$$

Definiţia 2.5 *Prin* tensor de tip (p,q) *(adică, tensor de p ori contravariant şi de q ori covariant) se înţelege un obiect matematic T descris în raport cu fiecare bază $\mathcal{B}$ a lui V prin coordonatele $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ şi care la o schimbare de bază $e'_i = \alpha^j_i\, e_j$ se schimbă după formula*

$$T'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \beta^{i_1}_{k_1}\, \beta^{i_2}_{k_2} \cdots \beta^{i_p}_{k_p} \alpha^{m_1}_{j_1}\, \alpha^{m_2}_{j_2} \cdots \alpha^{m_q}_{j_q}\, T^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{m_1 m_2 \ldots m_q}.$$

Observaţia 2.3 Elementele spaţiului vectorial V sunt tensori de tip $(1,0)$, iar elementele lui V^* sunt tensori de tip $(0,1)$.

Observaţia 2.4 Un tensor de tip $(1,1)$ este descris prin coordonatele T^i_j care la schimbarea bazei se schimbă după formula

$$T'^i_j = \beta^i_k\, \alpha^m_j\, T^k_m.$$

În cazul unui tensor de două ori contravariant formula devine

$$T'^{ij} = \beta^i_k\, \beta^j_m\, T^{km}$$

iar in cazul unui tensor de două ori covariant

$$T'_{ij} = \alpha^k_i\, \alpha^m_j\, T_{km}.$$

Observaţia 2.5 Un tensor este complet determinat dacă i se cunosc coordonatele într-o bază fixată.

2.3 Operaţii cu tensori

Propoziţia 2.6 *(Suma a doi tensori). Dacă* $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ *şi* $B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ *sunt coordonatele a doi tensori* A *şi* B *de tip* (p, q) *atunci*

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p, q) *notat cu* $A + B$*, adică*

$$(A + B)^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Demonstraţie (cazul $p = q = 1$). Avem

$$T'^i_j = A'^i_j + B'^i_j = \beta^i_k \, \alpha^m_j \, A^k_m + \beta^i_k \, \alpha^m_j \, B^k_m = \beta^i_k \, \alpha^m_j \, (A^k_m + B^k_m) = \beta^i_k \, \alpha^m_j \, T^k_m. \blacksquare$$

Propoziţia 2.7 (*Înmulţirea unui tensor cu un scalar*)*. Dacă* $\lambda \in \mathbb{K}$ *şi* $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ *sunt coordonatele unui tensor* A *de tip* (p, q) *atunci*

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \lambda A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p, q) *notat cu* λA*, adică*

$$(\lambda A)^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \lambda A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Demonstraţie (cazul $p = q = 1$). Avem

$$T'^i_j = \lambda A'^i_j = \lambda \beta^i_k \, \alpha^m_j \, A^k_m = \beta^i_k \, \alpha^m_j \, T^k_m. \blacksquare$$

Propoziţia 2.8 (*Produsul tensorial a doi tensori, într-un caz particular*)*. Dacă* A^i_{jk} *sunt coordonatele unui tensor* A *de tip* $(1, 2)$ *şi* B^l_m *sunt coordonatele unui tensor* B *de tip* $(1, 1)$ *atunci*

$$T^{il}_{jkm} = A^i_{jk} \cdot B^l_m$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(2, 3)$ *notat cu* $A \otimes B$*, adică*

$$(A \otimes B)^{il}_{jkm} = A^i_{jk} \cdot B^l_m.$$

Demonstraţie. Avem

$$T'^{il}_{jkm} = A'^{i}_{jk} \cdot B'^{l}_{m} = \beta^i_a\, \alpha^b_j\, \alpha^c_k\, A^a_{bc}\, \beta^l_r\, \alpha^s_m\, B^r_s = \beta^i_a\, \beta^l_r\, \alpha^b_j\, \alpha^c_k\, \alpha^s_m\, T^{ar}_{bcs}. \blacksquare$$

Observaţia 2.6 Generalizarea definiţiei produsului tensorial la tensori de orice tip este imediată. Produsul tensorial $x \otimes \varphi$ dintre un vector $x \in V$ si o 1-formă $\varphi \in V^*$ are coordonatele

$$(x \otimes \varphi)^i_j = x^i\, \varphi_j$$

iar produsul tensorial $x \otimes y$ a doi vectori coordonatele

$$(x \otimes y)^{ij} = x^i\, y^j.$$

Propoziţia 2.9 (*Contracţia unui tensor, într-un caz particular*). *Fie A^{ij}_{klm} coordonatele unui tensor A de tip $(2,3)$. Numerele*

$$T^j_{km} = \sum_{i=1}^{n} A^{ij}_{kim}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(1,2)$ obţinut prin contracţia lui A în raport cu primul indice de contravarianţă şi al doilea indice de covarianţă.

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} T'^{j}_{km} &= \textstyle\sum_{i=1}^n A'^{ij}_{kim} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \beta^i_a \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^d_i \alpha^r_m A^{ab}_{cdr} = \left(\sum_{i=1}^n \beta^i_a \alpha^d_i\right) \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m A^{ab}_{cdr} = \delta^d_a \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m A^{ab}_{cdr} \\ &= \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m \left(\delta^d_a A^{ab}_{cdr}\right) = \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m \left(\textstyle\sum_{a=1}^n A^{ab}_{car}\right) = \beta^j_b \alpha^c_k \alpha^r_m T^b_{cr}. \blacksquare \end{aligned}$$

Observaţia 2.7 Operaţia de contracţie se poate face în raport cu orice pereche de indici formată dintr-un indice de contravarianţă (superior) şi un indice de covarianţă (inferior).

Exerciţiul 2.1 Să se arate că dacă $x \in V$ şi $\varphi \in V^*$ atunci numărul

$$\gamma = x^i \varphi_i$$

este un tensor de tip $(0,0)$, numit *scalar*.

Rezolvare. Numărul γ se obţine prin contracţie din $x \otimes \varphi$ şi nu depinde de baza aleasă

$$\gamma' = \sum_{i=1}^{n} x'^i \varphi'_i = \sum_{i=1}^{n} \beta^i_j \alpha^k_i x^j \varphi_k = \delta^k_j x^j \varphi_k = x^j \varphi_j = \gamma. \blacksquare$$

2.4 Exemple de tensori

Exerciţiul 2.2 Să se arate că obiectul matematic care are coordonatele

$$T^i_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{daca} \quad i = j \\ 0 & \text{daca} \quad i \neq j \end{cases}$$

indiferent de baza utilizată, este un tensor de tip $(1,1)$.

Rezolvare. Avem

$$T'^i_j = \delta^i_j = \beta^i_k \alpha^k_j = \beta^i_k \alpha^m_j \delta^k_m = \beta^i_k \alpha^m_j T^k_m.$$

Propoziţia 2.10 *Orice operator liniar* $A : V \longrightarrow V$ *este un tensor de tip* $(1,1)$ *ale cărui coordonate într-o bază* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *sunt coeficienţii* A^j_i *din dezvoltarea*

$$Ae_i = A^j_i\, e_j.$$

Demonstraţie. Din relaţia $Ae'_i = A'^j_i\, e'_j$ rezultă

$$A(\alpha^k_i\, e_k) = A'^j_i \alpha^m_j e_m$$

relaţie care scrisă sub forma

$$\alpha^k_i\, Ae_k = \alpha^m_j\, A'^j_i\, e_m$$

conduce la

$$\alpha^k_i\, A^m_k\, e_m = \alpha^m_j A'^j_i\, e_m$$

adică

$$\alpha^k_i\, A^m_k = \alpha^m_j\, A'^j_i.$$

Din această relaţie obţinem

$$\beta^s_m\, \alpha^k_i\, A^m_k = \beta^s_m\, \alpha^m_j\, A'^j_i$$

relaţie echivalentă cu

$$A'^s_i = \beta^s_m\, \alpha^k_i\, A^m_k$$

deoarece $\beta^s_m \alpha^m_j\, A'^j_i = \delta^s_j\, A'^j_i = A'^s_i$. ∎

Definiţia 2.11 *Spunem că aplicaţia* $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ *este o aplicaţie* biliniară *dacă*

$$g(\alpha x + \beta y,\, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z)$$
$$g(x,\, \alpha y + \beta z) = \alpha g(x, y) + \beta g(x, z)$$

oricare ar fi $x, y, z \in V$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Propoziţia 2.12 *Orice aplicaţie biliniară* $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ *este un tensor de tip* $(0, 2)$ *ale cărui coordonate în baza* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *sunt numerele* $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Demonstraţie. Avem

$$g'_{ij} = g(e'_i, e'_j) = g(\alpha_i^k e_k, \alpha_j^m e_m) = \alpha_i^k \alpha_j^m g(e_k, e_m) = \alpha_i^k \alpha_j^m g_{km}. \ \blacksquare$$

Definiţia 2.13 *Aplicaţia* $g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ *este numită aplicaţie* biliniară *dacă este liniară în fiecare argument, adică*

$$g(\alpha \varphi + \beta \psi,\, x) = \alpha g(\varphi, x) + \beta g(\psi, x)$$
$$g(\varphi,\, \alpha x + \beta y) = \alpha g(\varphi, x) + \beta g(\varphi, y)$$

oricare ar fi $\varphi, \psi \in V^*$, $x, y \in V$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Propoziţia 2.14 *Orice aplicaţie biliniară* $g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ *este un tensor de tip* $(1, 1)$ *ale cărui coordonate intr-o bază* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *cu duala* $\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ *sunt* $g_j^i = g(e^i, e_j)$.

Demonstraţie. Avem

$$g'^i_{\ j} = g(e'^i, e'_j) = g(\beta_k^i\, e^k, \alpha_j^m\, e_m) = \beta_k^i\, \alpha_j^m\, g(e^k, e_m) = \beta_k^i\, \alpha_j^m\, g_m^k. \ \blacksquare$$

Propoziţia 2.15 *Orice tensor de tip* $(1, 1)$ *poate fi identificat cu o aplicaţie biliniară*

$$g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Demonstraţie. Folosind coordonatele T_j^i ale tensorului T de tip $(1, 1)$ într-o bază fixată $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ cu duala $\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ definim aplicatia biliniară

$$g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad g(\varphi, x) = g(\varphi_i\, e^i,\, x^j\, e_j) = T_j^i\, \varphi_i\, x^j.$$

Aplicaţia g astfel definită nu depinde de alegerea bazei $\mathcal{B}$ utilizate deoarece alegând altă bază $\mathcal{B}'$ obţinem

$$\begin{aligned} g(\varphi'_k\, e'^k,\, x'^m\, e'_m) &= T'^k_m\, \varphi'_k\, x'^m = \beta^k_a\, \alpha^b_m\, T^a_b\, \alpha^i_k\, \varphi_i\, \beta^m_j\, x^j \\ &= \delta^i_a\, \delta^b_j\, T^a_b\, \varphi_i\, x^j = T^i_j\, \varphi_i\, x^j. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Observaţia 2.8 Rezultatele prezentate mai sus pot fi generalizate în mod natural. Orice aplicaţie $(p+q)$-liniară

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ ori}} \times \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{q \text{ ori}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

este un tensor de tip (p,q) ale cărui coordonate într-o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ cu duala $\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ sunt

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = T(e^{i_1}, e^{i_2}, ..., e^{i_p}, e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_q})$$

şi fiecărui tensor de tip (p,q) îi corespunde în mod natural o astfel de aplicaţie $(p+q)$-liniară.

Observaţia 2.9 Plecând de la dualul V^* al lui V se poate defini dualul dualului lui V

$$V^{**} = (V^*)^*$$

numit *bidualul* lui V. Se poate arăta că V^{**} se poate identifica în mod natural cu V asociind lui $x \in V$ aplicaţia liniară

$$V^* \longrightarrow \mathbb{K} : \ \varphi \mapsto \varphi(x)$$

aparţinând bidualului lui V.

Observaţia 2.10 Dacă $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ şi $\psi : W \longrightarrow \mathbb{K}$ sunt aplicaţii liniare atunci

$$g : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad g(v,w) = \varphi(v) \cdot \psi(w)$$

este o aplicaţie biliniară numită *produsul tensorial* al lui φ cu ψ şi notată cu $\varphi \otimes \psi$.

Capitolul 3

Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

3.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Definiţia 3.1 *O* ecuaţie diferenţială de ordinul întâi *este o ecuaţie de forma*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

unde x este variabila independentă, y funcţia necunoscută, y' derivata funcţiei necunoscute şi $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, $I \subseteq \mathbb{R}$ fiind un interval.
Prin soluţie *a ecuaţiei (3.1) se înţelege o funcţie derivabilă*

$$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu $(a, b) \subseteq I$ şi astfel încât

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \qquad \forall x \in (a, b).$$

Definiţia 3.2 *Spunem că ecuaţia diferenţială*

$$y' = f(x, y) \qquad \textit{unde} \quad f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.2}$$

este o ecuaţie diferenţială scrisă sub formă normală*.*
Prin soluţie *a ecuaţiei (3.2) se înţelege o funcţie derivabilă*

$$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

1) $(x, \varphi(x)) \in D, \qquad \forall x \in (a, b)$

2) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \qquad \forall x \in (a, b).$

Observaţia 3.1 Ecuaţia (3.2) se mai poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{3.3}$$

sau sub forma

$$\mathrm{d}y = f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

numită *formă simetrică. Soluţia* ecuaţiei (3.4) se poate căuta sub forma

$$y = y(x)$$

sau

$$x = x(y)$$

sau, mai general, sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Ecuaţia (3.4) este caz particular pentru ecuaţia

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \qquad \text{unde} \quad P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.5}$$

care este *forma generală a unei ecuaţii simetrice.*
Prin soluţie a ecuaţiei (3.5) se înţelege o pereche de aplicaţii derivabile

$$\varphi,\, \psi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

1) $(\varphi(t), \psi(t)) \in D, \qquad \forall t \in (a, b)$

2) $P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t) = 0, \qquad \forall t \in (a, b).$

Observaţia 3.2 Ştim din liceu că dacă

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este o funcţie continuă atunci funcţia

$$F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

este o primitivă a lui f oricare ar fi $x_0 \in (a, b)$, adică avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x), \qquad \forall x \in (a, b).$$

Teorema 3.3 *Fie* ecuaţia cu variabile separabile

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{3.6}$$

unde $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue definite pe intervalele I şi J.

a) Dacă $y_0 \in J$ este astfel încât $g(y_0) = 0$ atunci funcţia constantă

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = y_0$$

este o soluţie a ecuaţiei (3.6).

b) Dacă $y_0 \in J$ este astfel încât $g(y_0) \neq 0$ atunci relaţia

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{x_0}^{x} f(v)\,\mathrm{d}v + C \tag{3.7}$$

unde $x_0 \in I$ şi C este o constantă, defineşte implicit o soluţie locală $y = y(x)$ a ecuaţiei (3.6).

Demonstraţie. a) Deoarece $\varphi'(x) = 0$ şi $g(\varphi(x)) = g(y_0) = 0$ rezultă că

$$\varphi'(x) = f(x)\, g(\varphi(x)), \qquad \forall x \in I.$$

b) Derivând relaţia (3.7) în raport cu x considerând $y = y(x)$ rezultă

$$\frac{1}{g(y(x))}\, y'(x) = f(x)$$

adică

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)). \ \blacksquare$$

Observaţia 3.3 Ecuaţia (3.6) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\, g(y)$$

sau forma simetrică

$$f(x)\, g(y)\, \mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$$

Forma diferenţială $f(x)\, g(y)\, \mathrm{d}x - \mathrm{d}y$ nu este diferenţiala totală a unei funcţii. Inmulţind ecuaţia anterioară cu *factorul integrant* $\frac{1}{g(y)}$ se obţine ecuaţia

$$f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{g(y)}\, \mathrm{d}y = 0 \tag{3.8}$$

al cărei membru stâng este o diferenţială totală deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{g(y)}\right).$$

Ecuaţia (3.8) se poate scrie sub forma

$$\mathrm{d}F = 0$$

unde

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(t) dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Rezultă că relaţia $F(x, y) = C$, adică

$$\int_{x_0}^{x} f(u) du - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(v)}\, \mathrm{d}v = C$$

defineşte implicit o soluţie a ecuaţiei (3.6) dacă alegem y_0 astfel încât $g(y_0) \neq 0$.

Propoziţia 3.4 Ecuaţia omogenă

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile dacă se utilizează schimbarea de variabilă $y(x) = x\, z(x)$, *unde* $z(x)$ *este noua funcţie necunoscută.*

Demonstraţie. Derivând $y(x) = x\,z(x)$ obţinem relaţia $y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$ care ne permite să scriem ecuaţia sub forma

$$z' = \frac{1}{x}\,(f(z) - z). \ \blacksquare$$

Propoziţia 3.5 Ecuaţia liniară omogenă

$$y' = f(x)\,y$$

are soluţia generală

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Demonstraţie. Ţinând seama de teorema 3.3 rezolvarea ecuaţiei poate fi prezentată dupa cum urmează

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,y$$

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{y} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\textstyle\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln|y| - \ln|y_0| = \textstyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}. \ \blacksquare$$

Propoziţia 3.6 *Soluţia generală a* ecuaţiei liniare neomogene

$$y' = f(x)\,y + g(x) \tag{3.9}$$

se obţine adunând soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene asociate

$$y' = f(x)\,y \tag{3.10}$$

cu o soluţie particulară $\tilde{y}$ a ecuaţiei (3.9).

Demonstraţie. Dacă y verifică (3.10) şi $\tilde{y}$ verifică (3.9) atunci

$$(y+\tilde{y})'(x) = f(x)\,y(x) + f(x)\,y(x) + g(x) = f(x)\,(y+\tilde{y})(x) + g(x).$$

Dacă y şi $\tilde{y}$ verifică (3.9) atunci $y - \tilde{y}$ verifică (3.10)

$$(y-\tilde{y})'(x) = f(x)\,y(x) + g(x) - f(x)\,\tilde{y}(x) - g(x) = f(x)\,(y-\tilde{y})(x). \ \blacksquare$$

Propoziţia 3.7 *O soluţie particulară $\tilde{y}$ a ecuaţiei liniare neomogene*

$$y' = f(x)\, y + g(x)$$

poate fi găsită folosind metoda variaţiei constantei *cautând-o de forma*

$$\tilde{y}(x) = C(x)\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}.$$

Demonstraţie. Inlocuind in ecuaţie obţinem relaţia

$$C'(x) = g(x)\, \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$$

care permite determinarea funcţiei $C(x)$. ∎

Propoziţia 3.8 Ecuaţia Bernoulli

$$y' = f(x)\, y + g(x)\, y^{\alpha}$$

se reduce la o ecuaţie liniară dacă se utilizează schimbarea de variabilă $z = y^{1-\alpha}$.

Demonstraţie. Dacă $\alpha = 1$ atunci ecuaţia este deja o ecuaţie liniară. In cazul $\alpha \neq 1$, împărţind cu y^{α} obţinem ecuaţia

$$y^{-\alpha} y' = f(x)\, y^{1-\alpha} + g(x)$$

care se poate scrie

$$\frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = f(x)\, y^{1-\alpha} + g(x).$$ ∎

Propoziţia 3.9 Ecuaţia Riccati

$$y' = f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x)$$

se poate rezolva utilizând schimbarea de variabilă

$$y = y_p + \frac{1}{z}$$

în cazul în care se cunoaşte o soluţie particulară y_p.

Demonstraţie. In urma schimbării de variabilă indicate ecuaţia devine

$$z' = -(2f(x)\, y_p(x) - g(x))\, z - f(x)$$

adică o ecuaţie liniară. ∎

3.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

Definiţia 3.10 *O* ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n *este o ecuaţie de forma*

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x) \tag{3.11}$$

unde

$$a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n,\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcţii continue definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $a_0(x) \neq 0$, *oricare ar fi* $x \in I$. *Prin* soluţie *a ecuaţiei (3.11) se înţelege o funcţie*

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

1) φ *admite derivate continue până la ordinul* n

2) $a_0(x)\,\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\,\varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)\,\varphi(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$

Teorema 3.11 *(de existenţă şi unicitate). Dacă*

$$a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n,\ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcţii continue şi

$$a_0(x) \neq 0 \qquad \forall x \in I$$

atunci ecuaţia diferenţială

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x)$$

admite pentru fiecare $(x_0, y_{00}, y_{01}, ..., y_{0n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$ *o unică soluţie*

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

$$\varphi(x_0) = y_{00}, \qquad \varphi'(x_0) = y_{01}, \quad ... \quad , \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Observaţia 3.4 Utilizând operatorul diferenţial

$$L = a_0(x)\,D^n + a_1(x)\,D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\,D + a_n(x)$$

unde

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,, \qquad D^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,, \quad ... \quad , \; D^n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$$

ecuaţia (3.11) se scrie

$$Ly = f.$$

Operatorul linar

$$L : C^n(I) \longrightarrow C^0(I)$$

unde

$$C^n(I) = \{\,\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ admite derivate continue pana la ordinul } n\,\}$$

$$C^0(I) = \{\,\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ este functie continua}\,\}$$

este un operator liniar

$$L(\alpha\,\varphi + \beta\,\psi) = \alpha\,L\varphi + \beta\,L\psi \qquad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R},\;\; \forall\varphi, \psi \in C^n(I).$$

Teorema 3.12 *Spaţiul*

$$\mathcal{V} = \{\;\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \;\; L\varphi = 0\;\}$$

al tuturor soluţiilor ecuaţiei liniare omogene

$$Ly = 0$$

este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie. Dacă $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ atunci

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi = 0$$

oricare ar fi α, $\beta \in \mathbb{R}$. Conform teoremei de existenţă şi unicitate, pentru $x_0 \in I$ fixat aplicaţia

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar. Rezultă că spaţiile vectoriale $\mathcal{V}$ şi $\mathbb{R}^n$ sunt izomorfe şi prin urmare $\dim \mathcal{V} = \dim \mathbb{R}^n = n$. ∎

Observaţia 3.5 Rezolvarea ecuaţiei

$$Ly = 0$$

înseamnă determinarea spaţiului vectorial $\mathcal{V} = \{\ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid\ L\varphi = 0\ \}$ al tuturor soluţiilor, ceea ce se poate realiza indicând o bază $\{y_1,\, y_2,\, \dots ,\, y_n\}$, caz în care

$$\mathcal{V} = \{\ c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \mid\ c_1,\, c_2,\, \dots ,\, c_n \in \mathbb{R}\ \}.$$

Funcţiile

$$y_1,\, y_2,\, \dots ,\, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ formează o bază a lui $\mathcal{V}$ dacă sunt liniar independente, adică dacă

$$\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 + \ \cdots\ + \alpha_n\, y_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ \cdots\ = \alpha_n = 0.$$

Propoziţia 3.13 *Funcţiile*

$$y_1,\, y_2,\, \dots ,\, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ *sunt liniar independente dacă şi numai dacă într-un punct fixat* $x_0 \in I$ *avem*

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.12}$$

Demonstraţie. Deoarece

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar funcţiile $y_1,\, y_2,\, \dots ,\, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă vectorii corespunzători

$$Ay_1 = (\, y_1(x_0),\, y_1'(x_0),\, \dots ,\, y_1^{(n-1)}(x_0)\,)$$

$$Ay_2 = (\, y_2(x_0),\, y_2'(x_0),\, \dots ,\, y_2^{(n-1)}(x_0)\,)$$

....

$$Ay_n = (\, y_n(x_0),\, y_n'(x_0),\, \dots ,\, y_n^{(n-1)}(x_0)\,)$$

sunt liniar independenţi, ceea ce este echivalent cu (3.12). ▪

Teorema 3.14 *(Abel-Liouville) Dacă*

$$y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt n soluţii ale ecuaţiei

$$Ly = 0$$

atunci funcţia (numită wronskian)

$$W : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

verifică relaţia

$$W(x) = W(x_0)\, \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, \mathrm{d}t} \tag{3.13}$$

unde $x_0 \in I$ este un punct fixat.

Demonstraţie (cazul $n = 2$.) Arătăm că W verifică ecuaţia liniară

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, W(x).$$

In cazul $n = 2$ ecuaţia $Ly = 0$, adică

$$a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2\, y = 0$$

conduce la

$$y'' = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, y' - \frac{a_2(x)}{a_0(x)}\, y$$

şi

$$\begin{aligned} W'(x) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = -\tfrac{a_1(x)}{a_0(x)}\, W(x). \end{aligned}$$ ▪

Observaţia 3.6 Din relaţia (3.13) rezultă că dacă W se anulează într-un punct din I atunci se anulează în toate punctele.

Propoziţia 3.15 *Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene*

$$Ly = f$$

se obţine adunând la soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate

$$Ly = 0$$

o soluţie particulară $\tilde{y}$ *a ecuaţiei neomogene.*

Demonstraţie. Deoarece $L\tilde{y} = f$ obţinem

$$Ly=0 \implies L(y+\tilde{y})=f \qquad si \qquad Ly=f \implies L(y-\tilde{y})=0. \ \blacksquare$$

Teorema 3.16 *(Metoda variaţiei constantelor.) Dacă*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, y_k(x)$$

este soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$Ly = 0$$

atunci o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$Ly = f$$

poate fi găsită căutând-o de forma

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k(x)$$

cu $c_1(x),\ c_2(x),\ \dots\ ,\ c_n(x)$ *soluţie a sistemului*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\, y_k^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Demonstraţie. Ţinând sema de (3.14) obţinem relaţiile

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k(x)\\
&\tilde{y}'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k'(x)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\tilde{y}^{(n-1)}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x)\\
&\tilde{y}^{(n)}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_0(x)}.
\end{aligned}$$

care conduc la

$$\begin{aligned}
&L\tilde{y} = a_0(x)\,\tilde{y}^{(n)} + a_1(x)\,\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,\tilde{y}' + a_n(x)\,\tilde{y}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\left(a_0(x)\,y_k^{(n)} + a_1(x)\,y_k^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y_k' + a_n(x)\,y_k\right) + f(x) = f(x). \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Definiţia 3.17 *Prin* ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi *se înţelege o ecuaţie de forma*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{3.15}$$

unde a_0, a_1, ..., a_n *sunt numere reale şi* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă definită pe un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$.

Observaţia 3.7 Ecuaţia (3.15) este un caz particular pentru ecuaţia (3.11) şi anume cel în care funcţiile $a_0(x)$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$ sunt funcţii constante. Ecuaţia (3.15) se poate scrie sub forma

$$P(D)y = f$$

unde P este polinomul

$$P(r) = a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n$$

numit *polinomul caracteristic* asociat ecuaţiei considerate.

Observaţia 3.8 Folosind notaţia lui Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$$

definim pentru fiecare număr complex $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ funcţia complexă

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

cu proprietăţile

$$D\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$$

$$\mathfrak{Re}\,(D\,\mathrm{e}^{rx}) = D(\,\mathfrak{Re}\,\mathrm{e}^{rx}\,)$$

$$\mathfrak{Im}\,(D\,\mathrm{e}^{rx}) = D(\,\mathfrak{Im}\,\mathrm{e}^{rx}\,)$$

unde $\mathfrak{Re}\,z$ şi $\mathfrak{Im}\,z$ reprezintă partea reală şi repectiv imaginară a numărului z.

Propoziţia 3.18 *Funcţia*

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad y(x) = \mathrm{e}^{rx}$$

este soluţie a ecuaţiei omogene

$$P(D)y = 0$$

dacă şi numai dacă r este rădăcină a polinomului caracteristic, adică dacă

$$a_0\,r^n + a_1\,r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,r + a_n = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece $D^k\mathrm{e}^{rx} = r^k\mathrm{e}^{rx}$ şi

$$P(D)\,\mathrm{e}^{rx} = (\,a_0\,r^n + a_1\,r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,r + a_n\,)\mathrm{e}^{rx}$$

avem

$$P(D)\,\mathrm{e}^{rx} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad P(r) = 0. \ \blacksquare$$

Propoziţia 3.19 *Dacă polinomul caracteristic $P(r)$ are rădăcinile r_1, r_2, ... , r_k cu multiplicităţile m_1, m_2, ... , m_k , adică*

$$P(r) = a_0\,(r-r_1)^{m_1}\,(r-r_2)^{m_2}\,\cdots\,(r-r_k)^{m_k}$$

atunci $P(D)$ admite factorizarea

$$P(D) = a_0\,(D-r_1)^{m_1}\,(D-r_2)^{m_2}\,\cdots\,(D-r_k)^{m_k}$$

ordinea factorilor putând fi schimbată fără a afecta rezultatul.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din linearitatea lui D şi din relaţia $D^p\, D^q = D^{p+q}$.

Propoziţia 3.20 *Dacă $Q(r)$ este un polinom şi $\varphi(x)$ este o funcţie atunci*

$$Q(D)\,(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) = \mathrm{e}^{rx}\,Q(D+r)\varphi$$

oricare ar fi $r \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. Arătăm mai întâi prin inducţie că

$$D^k\,(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) = \mathrm{e}^{rx}\,(D+r)^k\varphi.$$

Avem

$$D\,(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) = \mathrm{e}^{rx}\,D\varphi + r\mathrm{e}^{rx}\,\varphi = \mathrm{e}^{rx}\,(D+r)\varphi.$$

Presupunând că $D^k\,(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) = \mathrm{e}^{rx}\,(D+r)^k\varphi$ obţinem

$$D^{k+1}\,(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) = D(\mathrm{e}^{rx}\,(D+r)^k\varphi) = \mathrm{e}^{rx}(D+r)(D+r)^k\varphi = \mathrm{e}^{rx}\,(D+r)^{k+1}\varphi.$$

Dacă $Q(r) = \alpha_0\,r^m + \alpha_1\,r^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}r + \alpha_m$ atunci

$$\begin{aligned} Q(D)\,(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) &= \alpha_0\;D^m(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) + \alpha_1\,D^{m-1}(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) + \cdots + \alpha_{m-1}\,D(\mathrm{e}^{rx}\,\varphi) + \alpha_m \mathrm{e}^{rx}\,\varphi \\ &= \mathrm{e}^{rx}\,[\alpha_0\;(D+r)^m + \alpha_1\,(D+r)^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}\,(D+r) + \alpha_m]\varphi \\ &= \mathrm{e}^{rx}\,Q(D+r)\varphi. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Propoziţia 3.21 *Soluţia generală a ecuaţiei*

$$(D-r)^k y = 0$$

este

$$y(x) = c_0\,\mathrm{e}^{rx} + c_1\,x\,\mathrm{e}^{rx} + \cdots + c_{k-1}\,x^{k-1}\mathrm{e}^{rx}.$$

Demonstraţie. Conform propoziţiei anterioare avem relaţa

$$D^k\,(\mathrm{e}^{-rx}\,y) = \mathrm{e}^{-rx}\,(D-r)^k y$$

care arată că ecuaţia $(D-r)^k y = 0$ este echivalentă cu ecuaţia

$$D^k\,(\mathrm{e}^{-rx}\,y) = 0$$

care implică

$$e^{-rx}\, y(x) = c_0 + c_1\, x + \cdots + c_{k-1}\, x^{k-1}$$

adică

$$y(x) = c_0\, e^{rx} + c_1\, x\, e^{rx} + \cdots + c_{k-1}\, x^{k-1} e^{rx}. \blacksquare$$

Propoziţia 3.22 *Fie ecuaţia diferenţială liniară omogenă cu coeficienţi reali*

$$P(D)y = 0$$

unde $P(r) = a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n$ *este polinomul caracteristic.*

a) Dacă r_j *este rădăcină reală a lui* P *cu multiplicitatea* m_j *atunci funcţiile*

$$e^{r_j x}, \quad x\, e^{r_j x}, \quad \cdots \quad , \; x^{m_j - 1} e^{r_j x}$$

sunt soluţii particulare ale ecuaţiei $P(D)y = 0$.

b) Dacă $r_j = \alpha_j + i\beta_j$ *este rădăcină complexă a lui* P *cu multiplicitatea* m_j *atunci*

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j\, x), & x\, e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j\, x), & \cdots & , \; x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j\, x), \\ e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j\, x), & x\, e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j\, x), & \cdots & , \; x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j\, x) \end{array}$$

sunt soluţii particulare ale ecuaţiei $P(D)y = 0$.

Demonstraţie. Conform prop. 3.19 ecuaţia $P(D)y = 0$ admite o factorizare de forma

$$Q(D)\, (D - r_j)^{m_j} y = 0$$

şi $(D - r_j)^{m_j} y = 0$ implică $P(D)y = 0$. Deoarece ec. $P(D)y = 0$ are coeficienţi reali

$$P(D)y = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} P(D)\, (\mathfrak{Re}\; y) = \mathfrak{Re}\; (\, P(D)y\,) = 0 \\ P(D)\, (\mathfrak{Im}\; y) = \mathfrak{Im}\; (\, P(D)y\,) = 0 \end{cases}$$

adică în cazul în care r_j este rădăcină complexă cu multiplicitatea m_j funcţiile

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y(x) = \mathfrak{Re}\, \left(c_0\, e^{r_j x} + c_1\, x\, e^{r_j x} + \cdots + c_{m_j - 1}\, x^{m_j - 1} e^{r_j x} \right)$$

şi

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y(x) = \mathfrak{Im}\, \left(c_0\, e^{r_j x} + c_1\, x\, e^{r_j x} + \cdots + c_{m_j - 1}\, x^{m_j - 1} e^{r_j x} \right)$$

sunt soluţii ale ecuaţiei $P(D)y = 0$ oricare ar fi constantele reale c_0, c_1, ... , c_{m_j-1}. ■

Observaţia 3.9 Se poate demonstra că în toate cazurile în spaţiul soluţiilor există o bază formată din soluţii particulare de tipul celor prezentate in propoziţia anterioară.

Exerciţiul 3.1 Să se determine soluţia generală a ecuaţiilor

$$\begin{aligned}
&a) \quad y'' - 5y' + 6y = 0\\
&b) \quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0\\
&c) \quad y'' + y' + y = 0\\
&d) \quad (D^2 - D + 1)^3 y = 0\\
&e) \quad (D-3)^4 (D^2+2)^2 y = 0.
\end{aligned}$$

Răspuns.

$$\begin{aligned}
a) \quad y(x) &= c_1\, \mathrm{e}^{2x} + c_2\, \mathrm{e}^{3x}\\
b) \quad y(x) &= c_1\, \mathrm{e}^{2x} + c_2\, x\, \mathrm{e}^{2x} + c_3\, x^2\, \mathrm{e}^{2x}\\
c) \quad y(x) &= c_1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\\
d) \quad y(x) &= c_1\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\\
&\quad + c_3\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + c_4\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\\
&\quad + c_5\, x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + c_6\, x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\\
e) \quad y(x) &= c_1\, \mathrm{e}^{3x} + c_2\, x\, \mathrm{e}^{3x} + c_3\, x^2\, \mathrm{e}^{3x} + c_4\, x^3\, \mathrm{e}^{3x}\\
&\quad + c_5\, \cos(\sqrt{2}x) + c_6\, \sin(\sqrt{2}x) + c_7\, x\, \cos(\sqrt{2}x) + c_8\, x\, \sin(\sqrt{2}x).
\end{aligned}$$

Propoziţia 3.23 Ecuaţia Euler

$$a_0\, x^n\, y^{(n)} + a_1\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, x\, y' + a_n\, y = 0$$

se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabilă $x = \mathrm{e}^t$, *unde* t *este noua variabilă independentă.*

Demonstraţie (cazul $n = 3$). Notând cu $z(t)$ noua funcţie necunoscută avem relaţia

$$y(x) = z(\ln x)$$

care prin derivări succesive conduce la

$$y'(x) = \tfrac{1}{x}\, z'(\ln x) = \mathrm{e}^{-t}\, z'(t)$$
$$y''(x) = \tfrac{1}{x^2}\, z''(\ln x) - \tfrac{1}{x^2}\, z'(\ln x) = \mathrm{e}^{-2t}\, (\, z''(t) - z'(t)\,)$$
$$y'''(x) = \tfrac{1}{x^3}\, z'''(\ln x) - \tfrac{3}{x^3}\, z''(\ln x) - \tfrac{2}{x^3}\, z'(\ln x) = \mathrm{e}^{-3t}\, (\, z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)\,)$$

In urma schimbării de variabilă, ecuaţia Euler

$$a_0\, x^3\, y''' + a_1\, x^2\, y'' + a_2\, x\, y' + a_3\, y = 0$$

devine

$$a_0\, z''' + (-3a_0 + a_1)z'' + (2a_0 - a_1 + a_2)z' + a_3 z = 0. \ \blacksquare$$

Observaţia 3.10 Relaţia $x = \mathrm{e}^t$, echivalentă cu $t = \ln x$, conduce la

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Ecuaţia Euler se poate scrie

$$\left(a_0\, x^n\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1\, x^{n-1}\, \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\, x\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n \right) y = 0$$

şi formal, schimbarea de variabilă $x = \mathrm{e}^t$ în ecuaţia Euler se poate realiza înlocuind x cu e^t şi operatorul de derivare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ cu $\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. De remarcat că

$$\left(\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{e}^{-2t}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

3.3 Sisteme diferenţiale liniare

Definiţia 3.24 *Prin* sistem diferenţial liniar de ordinul întâi *se înţelege un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{3.16}$$

unde x este variabila independentă, y_1, y_2, ... , y_n sunt funcţiile necunoscute şi

$$\begin{array}{r} a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ f_i : I \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \qquad \textit{unde} \qquad i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

sunt funcţii continue definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Observaţia 3.11 Sistemul diferenţial liniar (3.16) se poate scrie sub forma matriceală

$$Y' = A(x)Y + F(x)$$

utilizând notaţiile

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.25 *(de existenţă şi unicitate). Dacă*

$$\begin{array}{r} a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ f_i : I \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \qquad \textit{unde} \qquad i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

sunt funcţii continue atunci oricare ar fi $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \in I \times \mathbb{R}^n$ *există o unică soluţie* $Y(x)$ *încât*

$$Y' = A(x)\,Y + F(x) \qquad si \qquad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.26 *Spaţiul* $\mathcal{V}$ *al tuturor soluţiilor sistemului diferenţial liniar omogen*

$$Y' = A(x)\,Y$$

este un spaţiu vectorial de dimensiune n*.*

Demonstraţie. Pentru $x_0 \in I$ fixat, din teorema de existenţă şi unicitate rezultă că aplicaţia liniară

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n : \ Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar. ■

Observaţia 3.12 Rezolvarea sistemului omogen $Y' = AY$ este echivalentă cu găsirea unei baze al lui $\mathcal{V}$, adică cu găsirea a n soluţii liniar independente.

Definiţia 3.27 *Plecând de la* n *soluţii ale sistemului omogen* $Y' = A(x)Y$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \qquad ... \qquad , \ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

construim matricea Wronski

$$W = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

şi wronskianul

$$w = \det W.$$

Teorema 3.28 *Soluţiile Y_1, Y_2, ... , Y_n formează o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ dacă şi numai dacă wronskianul lor este nenul într-un punct fixat $x_0 \in I$, adică*

$$w(x_0) \neq 0.$$

Demonstraţie. Deoarece

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n : \; Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar, soluţiile Y_1, Y_2, ... , Y_n sunt liniar independente dacă şi numai dacă vectorii $Y_1(x_0)$, $Y_2(x_0)$, ... , $Y_n(x_0)$ din $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenţi, ceea ce este echivalent cu $w(x_0) \neq 0$. ▪

Teorema 3.29 *Wronskianul soluţiilor Y_1, Y_2, ... , Y_n verifică relaţia*

$$w(x) = w(x_0)\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\, A(t)\, \mathrm{d}t} \tag{3.17}$$

unde $\mathrm{tr}\, A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)$ *este* urma *matricei $A(t)$.*

Demonstraţie (cazul $n = 2$.) Avem

$$w'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y'_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y'_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(x)\, y_{11}(x) + a_{12}(x)\, y_{21}(x) & y_{12}(x) \\ a_{21}(x)\, y_{11}(x) + a_{22}(x)\, y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & a_{11}(x)\, y_{12}(x) + a_{12}(x)\, y_{22}(x) \\ y_{21}(x) & a_{21}(x)\, y_{12}(x) + a_{22}(x)\, y_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, w(x)$$

adică w verifică ecuaţia diferenţială liniară

$$w' = \mathrm{tr}\, A(x)\; w. \; ▪$$

Observaţia 3.13 Din relaţia (3.13) rezultă că dacă wronskianul se anulează într-un punct $x_0 \in I$ atunci el se anulează în toate punctele $x \in I$.

Propoziţia 3.30 *Soluţia generală a sistemului liniar neomogen*

$$Y' = A(x)\, Y + F(x)$$

se obţine adunând la soluţia generală a sistemului liniar omogen asociat

$$Y' = A(x)\,Y$$

o soluţie particulară $\tilde{Y}$ a sistemului neomogen.

Demonstraţie. Deoarece $\tilde{Y}' = A(x)\,Y + F(x)$ obţinem

$$Y' = A(x)\,Y \quad\Longrightarrow\quad (Y+\tilde{Y})' = A(x)\,(Y+\tilde{Y}) + F(x)$$

$$Y' = A(x)\,Y + F(x) \quad\Longrightarrow\quad (Y-\tilde{Y})' = A(x)\,(Y-\tilde{Y}).\ \blacksquare$$

Observaţia 3.14 Folosind matricea Wronski W asociată unei baze $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ a lui $\mathcal{V}$ soluţia generală

$$Y = c_1\,Y_1 + c_2\,Y_2 + \cdots + c_n\,Y_n$$

a ecuaţiei liniare omogene $Y' = A(x)\,Y$ se poate scrie sub forma

$$Y(x) = W(x)\,C \qquad \text{unde} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.31 *(Metoda variaţiei constantelor). Dacă soluţia generală a sistemului*

$$Y' = A(x)\,Y$$

este $Y(x) = W(x)\,C$ atunci o soluţie particulară sistemului neomogen

$$Y' = A(x)\,Y + F(x)$$

se poate obţine căutând-o de forma

$$\tilde{Y}(x) = W(x)\,C(x)$$

unde $C(x)$ este o soluţie a sistemului

$$C'(x) = W^{-1}(x)\,F(x).$$

Demonstraţie. Deoarece $W' = A(x)W$ şi $\tilde{Y}'(x) = W'(x)\,C(x) + W(x)\,C'(x)$ avem

$$\tilde{Y}' = A(x)\,\tilde{Y} + F(x)$$

dacă şi numai dacă $W(x)\,C'(x) = F(x)$ ▪

Definiţia 3.32 *Prin* sistem diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi *se înţelege un sistem de ecuaţii de forma*

$$Y' = AY \qquad \textit{unde} \qquad A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Propoziţia 3.33 *Funcţia vectorială* $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $Y(x) = w\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, *unde*

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

verifică relaţia

$$Y' = AY$$

dacă şi numai dacă

$$Aw = \lambda w.$$

Demonstraţie. Deoarece $Y'(x) = \lambda w\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ înlocuind în $Y' = AY$ obţinem $Aw = \lambda w$. ▪

Observaţia 3.15 Fie λ o rădăcină a polinomului caracteristic

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ atunci λ este valoare proprie a matricei A şi alegând un vector propriu corespunzător $w \in \mathbb{R}^n$ obţinem soluţia netrivială $Y(x) = w\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ a sistemului $Y' = AY$. Dacă $\lambda \notin \mathbb{R}$ atunci există $w \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $Aw = \lambda w$ şi

$$Y_1(x) = \mathfrak{Re}\left(w\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right), \qquad Y_2(x) = \mathfrak{Im}\left(w\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right)$$

sunt soluţii ale sistemului $Y' = AY$.

Exerciţiul 3.2 Să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

are rădăcinile $\lambda_1 = 1+\mathrm{i}$ şi $\lambda_2 = 1-\mathrm{i}$. O soluţie particulară a ecuaţiei $Av = (1+\mathrm{i})v$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (1+\mathrm{i}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

este $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$. Rezultă că soluţia generală a sistemului este

$$\begin{aligned} Y(x) &= c_1\, \mathfrak{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \right\} + c_2\, \mathfrak{Im} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \right\} \\ &= c_1\, \mathfrak{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x}(\cos x + \mathrm{i}\, \sin x) \right\} + c_2\, \mathfrak{Im} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x}(\cos x + \mathrm{i}\, \sin x) \right\} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x} + c_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

Observaţia 3.16 Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă şi $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ unde

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \cdots \qquad v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

este o bază a lui $\mathbb{R}^n$ formată din vectori proprii ai lui A corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2, ... , λ_n (distincte sau nu) atunci soluţia generală a sistemului $Y' = AY$ este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

Exerciţiul 3.3 Să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Rezolvare. Rezolvând ecuaţia

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

obţinem $\lambda_1 = 2$, şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Deoarece subspaţiile proprii corespunzătoare sunt

$$V_2 = \{\, \alpha(1,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,\}, \qquad V_{-1} = \{\, \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) \mid \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\,\}.$$

rezultă că soluţia generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}.$$

Observaţia 3.17 Ştim că, în general, o matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ nu este diagonalizabilă. Dacă λ este o rădăcină reală (respectiv, complexă) cu multiplicitatea m a polinomului caracteristic atunci partea din soluţia generală corespunzătoare lui λ poate fi găsită căutând-o de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x^{m-1} + \alpha_{12}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{1m-1}x + \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}x^{m-1} + \alpha_{22}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{2m-1}x + \alpha_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}x^{m-1} + \alpha_{n2}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{nm-1}x + \alpha_{1m} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x}$$

unde coeficienţii α_{jk} sunt reali (respectiv, complecşi). In cazul complex, în final se separă părţile reală şi imaginară ale a soluţiei gasite.

Exerciţiul 3.4 Să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_2 + 4y_3 \\ y_3' = y_1 - 4y_3 \end{cases}$$

Rezolvare. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$, iar subspaţiile proprii corespunzătoare

$$V_0 = \{\,\alpha(4,4,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,\}, \qquad V_{-3} = \{\,\alpha(1,-2,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\,\}.$$

Deoarece $\dim V_{-3} = 1$ rezultă că matricea sistemului nu este diagonalizabilă. Căutând partea din soluţia generală referitoare la $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x}$$

găsim

$$Y(x) = \alpha_1 \begin{pmatrix} x \\ -2x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x}.$$

Soluţia generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ -2x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x}.$$

Observaţia 3.18 O altă metodă de rezolvare a sistemelor liniare omogene cu coeficienţi constanţi, numită *metoda eliminării*, se bazează pe faptul că fiecare dintre funcţiile necunoscute y_j verifică o ecuaţie diferenţială liniară.

Exerciţiul 3.5 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_1. \end{cases}$$

Rezolvare. Funcţia necunoscută y_1 verifică ecuaţia liniară

$$y_1''' - y_1 = 0.$$

Deoarece $P(r) = r^3 - 1$ are rădăcinile $r_1 = 1$ şi $r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că

$$y_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Prin derivarea lui y_1 se obţin y_2 şi y_3.

Observaţia 3.19 Deoarece izomorfismul de spaţii vectoriale

$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^{n^2}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

permite identificarea spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ cu $\mathbb{K}^{n^2}$, aplicaţia

$$||\cdot|| : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \left|\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

este o normă pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. In particular, o serie de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, A^k$$

este *convergentă* dacă există limita

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k\, A^k$$

adică dacă există $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$\lim_{m\to\infty} \left|\left| \sum_{k=0}^{m} a_k\, A^k \; - \; B \right|\right| = 0.$$

Propoziţia 3.34 *Dacă seria de puteri*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

are raza de convergenţă $R > 0$ *şi dacă* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *este astfel încât* $||A|| < R$ *atunci seria de matrice*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, A^k$$

este convergentă.

Demonstraţie. Alegând r astfel încât $||A|| < r < R$ obţinem relaţia

$$\left|\left|a_k\, A^k\right|\right| = |a_k|\ \left|\left|A^k\right|\right| \leq |a_k|\, ||A||^k < |a_k|\, r^k.$$

Seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, r^k$ fiind absolut convergentă, din criteriul comparaţiei rezultă că seria $\sum_{k=0}^{\infty} ||a_k\, A^k||$ este convergentă, ceea ce implică convergenţa seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, A^k$. ∎

Observaţia 3.20 Deoarece seria exponenţială

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

are raza de convergenţă $r = \infty$ rezultă că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ putem defini matricea

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

numită *exponenţiala matricei A*. Se poate arăta că funcţia matriceală

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : \ t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$$

este derivabilă şi că $(\mathrm{e}^{tA})' = A\,\mathrm{e}^{tA}$ adică

$$Y(t) = \mathrm{e}^{tA} C$$

este soluţie a sistemului liniar $Y' = AY$, oricare ar fi $C \in \mathbb{R}^n$.

Exerciţiul 3.6 Să se determine soluţia sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este diagonalizabilă

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{unde} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$A = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

obţinem

$$A^k = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

şi

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

relaţie care permite scrierea explicită a soluţiei generale.

Capitolul 4

Funcţii sferice

4.1 Polinoame Legendre

Propoziţia 4.1 *Proiecţia ortogonală a vectorului x pe vectorul $u \neq 0$ este vectorul*

$$\mathcal{P}_u x = \frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u.$$

Figura 4.1

Demonstraţie. Proiecţia lui x pe u este un vector de forma λu. Impunând ca proiecţia să fie ortogonală , adică

$$(x - \lambda u) \perp u$$

obţinem relaţia (a se vedea figura 4.1)

$$\langle x - \lambda u, u\rangle = 0$$

care conduce la $\lambda = \frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}$. ▪

Teorema 4.2 *(Metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt). Dacă* $\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, ...\}$ *este un sistem liniar independent (finit sau infinit) atunci* $\{w_1,\, w_2,\, w_3,\, ...\}$*, unde*

$$\begin{aligned} &w_1 = v_1 \\ &w_2 = v_2 - \tfrac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}\, w_1 \\ &w_3 = v_3 - \tfrac{\langle v_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}\, w_1 - \tfrac{\langle v_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle}\, w_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

este un sistem ortogonal astfel incât spaţiul vectorial generat de $\{v_1,\, v_2,\, ...\, ,\, v_k\}$ *este acelaşi cu spaţiul vectorial generat de* $\{w_1,\, w_2,\, ...\, ,\, w_k\}$*, oricare ar fi* $k \in \{1, 2, 3, ...\}$.

Demonstraţie. Avem

$$\langle w_2, w_1\rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\, w_1,\, w_1 \right\rangle = \langle v_2, w_1\rangle - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\, \langle w_1, w_1\rangle = 0.$$

Similar se arată că oricare vector w_k este ortogonal pe vectorii $w_1,\, w_2,\, ...\, ,\, w_{k-1}$. ▪

Definiţia 4.3 *Polinoamele* $P_0,\, P_1,\, P_2\, \dots$ *satisfăcând condiţia*

$$P_n(1) = 1$$

obţinute ortogonalizând şirul $1,\, x,\, x^2,\, \dots$ *în raport cu produsul scalar*

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx$$

se numesc polinoame Legendre*.*

Exerciţiul 4.1 Să se determine polinoamele Legendre P_0, P_1 şi P_2.

Rezolvare. Ortogonalizând $1,\ x,\ x^2$ rezultă polinoamele

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = x - \tfrac{\langle x, Q_0\rangle}{\langle Q_0, Q_0\rangle}\, Q_0(x) = x$$

$$Q_2(x) = x^2 - \tfrac{\langle x^2, Q_0\rangle}{\langle Q_0, Q_0\rangle}\, Q_0(x) - \tfrac{\langle x^2, Q_1\rangle}{\langle Q_1, Q_1\rangle}\, Q_1(x) = x^2 - \tfrac{1}{3}.$$

Obţinem polinoamele P_0, P_1, P_2 căutându-le de forma $P_n = \alpha_n\, Q_n$ cu constantele α_n determinate astfel încât $P_n(1) = 1$. Rezultă $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ şi $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Teorema 4.4 *(Formula lui Rodrigues) Polinomul Legendre P_n verifică relaţia*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\, 2^n}\, \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Avem $\frac{1}{0!\, 2^0}\, \left[(x^2-1)^0\right]^{(0)} = 1 = P_0(x)$. Fie $n > 0$ fixat şi fie $\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{n!\, 2^n}\, \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$. Deoarece $\tilde{P}_n$ este un polinom de gradul n rezultă că există α_0, α_1,$\ldots$ $\alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\tilde{P}_n = \alpha_0\, P_0 + \alpha_1\, P_1 + \cdots + \alpha_n P_n.$$

Avem

$$\langle 1, \tilde{P}_n\rangle = \frac{1}{n!\, 2^n} \int_{-1}^{1} [(x^2-1)^n]^{(n)} dx = \frac{1}{n!\, 2^n}\ \left. [(x^2-1)^n]^{(n-1)}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Dacă $n > 1$, integrând prin părţi obţinem

$$\langle x, \tilde{P}_n\rangle = \tfrac{1}{n!\, 2^n} \int_{-1}^{1} x[(x^2-1)^n]^{(n)} dx$$

$$= \tfrac{1}{n!\, 2^n}\, x\ \left. [(x^2-1)^n]^{(n-1)}\right|_{-1}^{1} - \tfrac{1}{n!\, 2^n} \int_{-1}^{1} [(x^2-1)^n]^{(n-1)} dx = 0$$

şi în general,

$$\langle x^k, \tilde{P}_n\rangle = 0 \qquad \text{oricare ar fi}\ \ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Din relaţia precedentă rezultă

$$\langle P_k, \tilde{P}_n\rangle = 0 \qquad \text{oricare ar fi} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Tinând seama de ortogonalitatea polinoamelor Legendre obţinem relaţia

$$0 = \langle P_k, \tilde{P}_n\rangle = \langle P_k, \alpha_0\, P_0 + \alpha_1\, P_1 + \cdots + \alpha_n P_n\rangle = \alpha_k\,\langle P_k, P_k\rangle$$

din care rezultă

$$\alpha_k = 0, \qquad \text{oricare ar fi} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

şi deci $\tilde{P}_n = \alpha_n P_n$. Deoarece $P_n(1) = 1$ şi

$$\tilde{P}_n(1) = \frac{1}{n!\,2^n}\left[\sum_{j=0}^{n} C_n^j [(x-1)^n]^{(j)}[(x+1)^n]^{(n-j)}\right]_{x=1} = 1$$

rezultă că $\alpha_n = 1$ şi deci $\tilde{P}_n = P_n$. ∎

Propoziţia 4.5 *Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia (numită ecuaţia polinoamelor Legendre)*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

admite o soluţie polinomială dar nu admite soluţii polinomiale liniar independente.

Demonstraţie. Din teoria generală a ecuaţiilor diferenţiale ştim că spaţiul soluţiilor ecuaţiei considerate este un spaţiu vectorial de dimensiune 2. Dacă ecuaţia ar admite două soluţii polinomiale liniar independente atunci ele ar forma o bază în spaţiul soluţiilor şi prin urmare toate soluţiile ar fi polinomiale. Căutând soluţii dezvoltabile în serie de puteri

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

arătăm că ecuaţia admite atât soluţii polinomiale cât şi nepolinomiale. Deoarece în domeniul de convergenţă

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}, \qquad y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}$$

înlocuind în ecuaţie obţinem relaţia

$$[2c_2 + n(n+1)c_0] + [3 \cdot 2c_3 + (n-1)(n+2)c_1]x + \cdots$$

$$+[(m+2)(m+1)c_{m+2} + (n-m)(m+n+1)c_m]x^m + \cdots = 0$$

din care rezultă

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} + (n-m)(m+n+1)c_m = 0, \qquad \text{oricare ar fi } \ m \in \mathbb{N}.$$

Alegând $c_0 = 1,\ \ c_1 = 0$ obţinem soluţia

$$y_0(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots$$

iar alegând $c_0 = 0,\ \ c_1 = 1$ obţinem soluţia

$$y_1(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

Deoarece

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|c_{m+2}|}{|c_m|} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m-n)(m+n+1)}{(m+2)(m+1)} = 1$$

soluţiile y_0 şi y_1 sunt convergente pentru $|x^2| < 1$, adică pentru $|x| < 1$. Dacă n este număr par atunci y_0 este soluţie polinomială (seria are un număr finit de coeficienţi nenuli) iar y_1 este soluţie nepolinomială. Dacă n este număr impar atunci y_1 este soluţie polinomială şi y_0 nepolinomială. ▪

Propoziţia 4.6 *Soluţia polinomială a ecuaţiei*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

care verifică condiţia $y(1) = 1$ *este polinomul Legendre* P_n.

Demonstraţie. Fie $u(x) = (x^2-1)^n$. Avem

$$u' = 2nx\,\frac{u}{x^2-1}$$

adică

$$(x^2-1)u' = 2nx\,u.$$

Derivând relaţia anterioară de $(k+1)$ ori folosind formula lui Leibniz

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^{j} \, f^{(j)} \, g^{(k+1-j)}$$

obţinem

$$(x^2-1)u^{(k+2)} + 2(k+1)\,x\,u^{(k+1)} + 2\,\frac{(k+1)k}{2}\,u^{(k)} = 2nx\,u^{(k+1)} + 2(k+1)nx\,u^{(k)}.$$

Inmulţind cu $\frac{1}{n!\,2^n}$ relaţia rezultată şi înlocuind k cu n rezultă

$$(1-x^2)(u^{(n)})'' - 2x(u^{(n)})' + n(n+1)u^{(n)} = 0$$

adică

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0. \ \blacksquare$$

Propoziţia 4.7 *(Seria binomială) Dezvoltând în serie Taylor în jurul lui* 0 *funcţia*

$$f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1+x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)}$$

obţinem

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots$$

Demonstraţie. Deoarece

$$f^{(n)}(x) = [(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n}$$

seria Taylor corespunzătoare lui f

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

este seria de puteri

$$1 + \alpha\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots$$

cu raza de convergenţă

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n+1|}{n} = 1. \ \blacksquare$$

Teorema 4.8 *(Funcţia generatoare). Pentru* $x \in (-1,1)$ *şi* t *într-o vecinătate suficient de mică a lui* 0 *avem*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n.$$

Demonstraţie. Fie $x \in (-1,1)$ şi γ_x un drum închis care se roteşte o dată în jurul lui x în sens direct (a se vedea figura 4.2).

Figura 4.2

Utilizând formula lui Cauchy obţinem

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!\,2^n}[(x^2-1)^n]^{(n)}\\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!\,2^n}\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_x}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz\\ &= \textstyle\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_x}\left[\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right]^n\frac{1}{z-x}dz.\end{aligned}$$

Pentru t într-o vecinătate a lui 0 aleasă astfel încât $\left|\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right| < 1$ avem

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n &= \textstyle\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_x}\frac{1}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}\right]^n dz\\ &= \textstyle\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_x}\frac{1}{z-x}\frac{1}{1-\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)}}dz\\ &= \textstyle\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_x}\frac{dz}{-tz^2+2z+t-2x}\end{aligned}$$

Punctele singulare ale funcţiei f de sub integrală

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{1-2xt+t^2}}{t} \qquad si \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}$$

verifică relaţiile $\lim_{t\to 0} z_1 = x$ şi $\lim_{t\to 0} |z_2| = \infty$. Pentru t într-o vecinătate destul de mică a lui 0 din teorema reziduurilor rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = \tfrac{1}{\pi \mathrm{i}}\, 2\pi\mathrm{i}\, \mathbf{Rez}_{z_1} f = 2\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\, f(z)$$

$$= 2\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\, \tfrac{1}{-t(z-z_1)(z-z_2)} = \tfrac{-2}{t(z_1-z_2)} = \tfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \ \blacksquare$$

Teorema 4.9 *Polinoamele Legendre verifică relaţia de recurenţă*

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Demonstraţie. Derivând în raport cu t relaţia

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, t^k.$$

obţinem relaţia

$$\frac{-(t-x)}{(1-2xt+t^2)\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x)\, t^{k-1}$$

care se mai poate scrie

$$(x-t)\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)\, t^k = (1-2xt+t^2)\sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x)\, t^{k-1}.$$

Identificând coeficienţii lui t^n din cei doi membri a ultimei identităţi obţinem relaţia de recurenţă din enunţul teoremei. $\blacksquare$

Teorema 4.10 *(Norma polinoamelor Legendre) Avem*

$$||P_n|| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \qquad \textit{si} \qquad \langle P_n, P_{n'}\rangle = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{nn'}.$$

Demonstraţie. Integrând de n ori prin părţi obţinem

$$||P_n||^2 = \langle P_n, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) \tfrac{1}{n!\,2^n}[(x^2-1)^n]^{(n)} dx$$

$$= \tfrac{(-1)^n}{n!\,2^n} \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx.$$

Deoarece

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!\,2^n}[(x^2-1)^n]^{(2n)} = \frac{(2n)!}{n!\,2^n}$$

avem

$$||P_n||^2 = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\,\frac{(2n)!}{n!\,2^n}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!\,2^n)^2}\,I_n$$

unde

$$I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

Utilizând relaţia de recurenţă (obţinută integrând prin părţi)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \int_{-1}^{1}(x^2-1)(x^2-1)^{n-1}dx \\ &= \tfrac{1}{2n}\int_{-1}^{1} x\cdot[(x^2-1)^n]'dx - I_{n-1} = \tfrac{-1}{2n}I_n - I_{n-1} \end{aligned}$$

care conduce la

$$I_n = -\frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \cdots = (-1)^n\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

obţinem

$$||P_n||^2 = \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!\,2^n)^2}\,I_n = \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!\,2^n)^2}\,(-1)^n\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}. \;\blacksquare$$

Observaţia 4.1 Se poate arăta că şirul de polinoame

$$\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

este o bază ortonormată în spaţiul Hilbert $L^2(-1,1)$.

4.2 Funcţii Legendre asociate

Definiţia 4.11 *Funcţiile*

$$P_l^m : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x)$$

unde $l \in \mathbb{N}$ *şi* $m \in \{0,1,\dots,l\}$ *sunt numite* funcţii Legendre asociate.

Exerciţiul 4.2 Să se determine P_0^0, P_1^0, P_1^1, P_2^0, P_2^1 şi P_2^2.

Rezolvare. Deoarece $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ şi $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ avem

$$P_0^0(x) = 1 \qquad P_1^0(x) = x \qquad P_2^0(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}$$

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

Teorema 4.12 *Ecuaţia (numită* ecuaţia funcţiilor Legendre asociate*)*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0 \tag{4.1}$$

admite în cazul $\lambda = l(l+1)$ *cu* $l \in \{m,\, m+1,\, \dots\}$ *ca soluţie funcţia* P_l^m.

Demonstraţie. Funcţia

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} z(x)$$

verifică ecuaţia (4.1) dacă şi numai dacă z este soluţie a ecuaţiei

$$(1-x^2)z'' - 2(m+1)xz' + [l(l+1) - m(m+1)]z = 0.$$

Polinomul Legendre P_l verifică ecuaţia

$$(1-x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0.$$

Derivând această relaţie de m ori obţinem relaţia

$$(1-x^2)(P_l^{(m)})'' - 2(m+1)x(P_l^{(m)})' + [l(l+1) - m(m+1)]P_l^{(m)} = 0. \blacksquare$$

Observaţia 4.2 Utilizând formula lui Rodrigues obţinem relaţia

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x) = \frac{1}{l!\,2^l}\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,[(x^2-1)^l]^{(l+m)}$$

care are sens şi pentru $m \in \{-l,\, -l+1,\, \dots,\, -1\}$. Mai mult, se poate arăta că P_l^m verifică ecuaţia

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

oricare ar fi $l \in \mathbb{N}$ şi $m \in \{-l,\, -l+1,\, \dots,\, l-1,\, l\}$.

Teorema 4.13 *(Norma funcţiilor Legendre asociate) Avem*

$$||P_l^m|| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \qquad si \qquad \langle P_l^m, P_{l'}^m\rangle = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}.$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ *şi* $l, l' \in \{m,\, m+1,\, m+2,\, \dots\}$.

Demonstraţie. Derivând de m ori ecuaţia

$$(1-x^2)\,P_l''(x) - 2x\,P_l'(x) + l(l+1)\,P_l(x) = 0$$

verificată de polinomul Legendre P_l obţinem relaţia

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,P_l^{(m+2)}(x) - 2mx\,P_l^{(m+1)}(x) - m(m-1)\,P_l^{(m)}(x)\\ -2x\,P_l^{(m+1)}(x) - 2m\,P_l^{(m)}(x) + l(l+1)\,P_l^{(m)}(x) = 0\end{aligned}$$

care după înmulţirea cu $(1-x^2)^m$ se poate scrie sub forma

$$[(1-x^2)^{m+1}\,P_l^{(m+1)}(x)]' = -[l(l+1) - m(m+1)]\,(1-x^2)^m\,P_l^m(x).$$

Pentru $m > 0$, utilizând integrarea prin părţi şi relaţia precedentă obţinem

$$\begin{aligned}\langle P_l^m, P_{l'}^m\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\, P_l^{(m)}(x)\, P_{l'}^{(m)}(x)\, dx\\ &=(1-x^2)^m\, P_l^{(m)}(x)\, P_{l'}^{(m-1)}|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}[(1-x^2)^m\, P_l^{(m)}(x)]'\, P_{l'}^{(m-1)}(x)\, dx\\ &= (l-m+1)(l+m)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\, P_l^{(m-1)}(x)\, P_{l'}^{(m-1)}(x)\, dx\\ &= (l-m+1)(l+m)\langle P_l^{m-1}, P_{l'}^{m-1}\rangle\\ &= (l-m+1)(l-m+2)(l+m-1)(l+m)\langle P_l^{m-2}, P_{l'}^{m-2}\rangle = \cdots\\ &= (l-m+1)(l-m+2)\dots(l+m)\langle P_l^0, P_{l'}^0\rangle = \tfrac{2}{2l+1}\,\tfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Observaţia 4.3 Se poate arăta că oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ sistemul

$$\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m\right\}_{l\in\{m,m+1,\dots\}}$$

este o bază ortonormată în spaţiul Hilbert $L^2(-1,1)$. Utilizând schimbarea de variabilă $x = \cos\theta$ rezultă imediat că sistemul de funcţii

$$\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\right\}_{l\in\{m,m+1,\dots\}}$$

este un sistem ortonormat in raport cu produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(\theta)\, g(\theta)\, \sin\theta\, d\theta.$$

4.3 Funcţii sferice

Observaţia 4.4 In coordonate sferice (a se vedea figura 4.3)

Figura 4.3

$$\begin{cases} x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ z = r\,\cos\theta \end{cases}$$

punctele sferei unitate

$$S = \{\,(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,\}$$

sunt complet descrise de variabilele unghiulare θ şi φ.

Definiţia 4.14 *Funcţiile* $Y_l^m : S \longrightarrow \mathbb{R}$*,*

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_l^m(\cos\theta)\,\cos m\varphi & daca \quad m \in \{0, 1, \ldots, l\} \\ P_l^{|m|}(\cos\theta)\,\sin m\varphi & daca \quad m \in \{-l,\ -l+1,\ \ldots, -1\} \end{cases}$$

se numesc funcţii sferice fundamentale*.*

Exerciţiul 4.3 Să se determine Y_0^0, Y_1^{-1}, Y_1^0, Y_1^1, Y_2^{-2}, Y_2^{-1}, Y_2^0, Y_2^1 şi Y_2^2.

Rezolvare. Deoarece

$$P_0^0(x) = 1 \qquad P_1^0(x) = x \qquad P_2^0(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}$$

$$P_1^1(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad P_2^1(x) = 3x\sqrt{1 - x^2}$$

$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2)$$

avem

$$\begin{array}{ll} Y_0^0(\theta,\varphi)=1 & Y_2^{-2}(\theta,\varphi)=-3\sin^2\theta\,\sin 2\varphi \\ & Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=-3\sin\theta\,\cos\theta\,\sin\varphi \\ Y_1^{-1}(\theta,\varphi)=-\sin\theta\sin\varphi & Y_2^{0}(\theta,\varphi)=\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2} \\ Y_1^{0}(\theta,\varphi)=\cos\theta & Y_2^{1}(\theta,\varphi)=3\cos\theta\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ Y_1^{1}(\theta,\varphi)=\sin\theta\,\cos\varphi & Y_2^{2}(\theta,\varphi)=3\sin^2\theta\,\cos 2\varphi \end{array}$$

Observaţia 4.5 Funcţiile P_l^m fiind definite oricare ar fi $m\in\{-l,\,-l+1,\,\cdots,\,l-1,\,l\}$ putem considera funcţiile (numite de asemenea *funcţii sferice fundamentale*)

$$Y_l^m : S \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

oricare ar fi $l\in\mathbb{N}$ şi $m\in\{-l,\,-l+1,\,\ldots,\,l-1,\,l\}$.

Teorema 4.15 *Sistemul de funcţii*

$$\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0m})}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\;Y_l^m(\theta,\varphi)\right\}_{\substack{l\in\mathbb{N}\\ m\in\{-l,l+1,\ldots,l\}}}$$

este un sistem ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\,g(\theta,\varphi)\,\sin\vartheta\;d\varphi\,d\theta.$$

Demonstraţie. Deoarece

$$\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\,\cos m'\varphi\,d\varphi=\pi\,(1+\delta_{0m})\,\delta_{mm'}=\begin{cases} 0 & \text{daca} \quad m\neq m' \\ \pi & \text{daca} \quad m=m'\neq 0 \\ 2\pi & \text{daca} \quad m=m'=0 \end{cases}$$

în cazul $m\geq 0$, $m'\geq 0$ utilizând schimbarea de variabilă $x=\cos\theta$ obţinem

$$\langle Y_l^m,Y_{l'}^{m'}\rangle=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_l^m(\cos\theta)\,P_{l'}^{m'}(\cos\theta)\,\cos m\varphi\,\cos m'\varphi\,\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\pi\,(1+\delta_{0m})\,\delta_{mm'}\int_{-1}^{1}P_l^m(x)\,P_{l'}^m(x)\,dx=\frac{2\pi}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,(1+\delta_{0m})\,\delta_{mm'}\,\delta_{ll'}.$$

Similar se analizează celelalte cazuri. ∎

Observaţia 4.6 Se poate arăta că sistemul ortonormat considerat în teorema precedentă este o bază ortonormată în spaţiul $L^2(S)$ al funcţiilor de pătrat integrabil definite pe suprafaţa sferei unitate.

4.4 Problema Dirichlet pentru ecuaţia Laplace

Expresia în coordonate sferice a operatorului diferenţial

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

numit *laplacean*, este

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Propoziţia 4.16 *Funcţia*

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi) = R(r)\,T(\theta)\,F(\varphi)$$

este soluţie a ecuaţiei Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{4.2}$$

dacă există constantele μ *şi* λ *astfel încât*

a) Funcţia F *verifică*

$$\begin{cases} F'' + \mu F = 0 \\ F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi) \end{cases} \tag{4.3}$$

b) Funcţia $y(x) = T(\arccos x)$ *verifică*

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \\ y(\pm 1) = finit \end{cases} \tag{4.4}$$

c) Funcţia R *verifică ecuaţia Euler*

$$r^2\,R'' + 2r\,R' - \lambda R = 0. \tag{4.5}$$

Demonstraţie. Căutând pentru ecuaţia (4.2) soluţii de forma $u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$ obţinem relaţia

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\,R'(r))\,Y(\theta,\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

pe care o scriem sub forma

$$\frac{r^2\,R''+2r\,R'}{R}=\frac{\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{-Y(\theta,\varphi)}.$$

Deoarece membrul stâng este o funcţie de r şi membrul drept este o funcţie de θ şi φ egalitatea precedentă este posibilă numai dacă funcţiile R şi Y sunt astfel încât cei doi membri sunt funcţii constante egale. Notând cu λ constanta respectivă rezultă că R trebuie să fie astfel încât

$$r^2\,R''+2r\,R'-\lambda R=0$$

şi Y astfel încât

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0.$$

Căutând pentru ultima ecuaţie soluţii de forma $Y(\theta,\varphi)=T(\theta)\,F(\varphi)$ obţinem relaţia

$$\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,T'(\theta)\right)\,F(\varphi)+T(\theta)\,F''(\varphi)+\lambda\,\sin^2\theta\,T(\theta)\,F(\varphi)=0$$

pe care o scriem sub forma

$$\frac{\sin^2\theta\,T''(\theta)+\sin\theta\,\cos\theta\,T'(\theta)+\lambda\,\sin^2\theta\,T(\theta)}{T(\theta)}=\frac{F''(\varphi)}{-F(\varphi)}.$$

Membrul stâng fiind o funcţie de θ şi membrul drept una de φ, egalitatea este posibilă numai dacă există o constantă μ astfel încât

$$F''(\varphi)+\mu\,F(\varphi)=0$$

şi

$$\sin^2\theta\,T''(\theta)+\sin\theta\,\cos\theta\,T'(\theta)+\lambda\,\sin^2\theta\,T(\theta)-\mu\,T(\theta)=0.$$

In ultima ecuaţie utilizăm schimbarea de variabilă $x=\cos\theta$ care conduce la

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{dx}{d\theta}\,\frac{d}{dx}=-\sin\theta\,\frac{d}{dx}=-\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}.$$

Notând $y(x)=T(\arccos x)$ deducem că funcţia y trebuie să verifice ecuaţia

$$-(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}\right)-x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+[\lambda(1-x^2)-\mu]y=0$$

care se poate scrie sub forma

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0.$$

Propoziţia 4.17

a) Dacă $\mu = m^2$ cu $m \in \mathbb{N}$ atunci soluţia generală a ecuaţiei (4.3) este

$$F(\varphi) = a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi$$

unde a_m şi b_m sunt constante arbitrare.

b) Dacă $\mu = m^2$ cu $m \in \mathbb{N}$ şi $\lambda = l(l+1)$ cu $l \in \{m,\, m+1,\, m+2, \ldots\}$ atunci ecuaţia (4.4) admite ca soluţie funcţia Legendre asociată P_l^m.

c) Dacă $\lambda = l(l+1)$ cu $l \in \mathbb{N}$ atunci soluţia generală a ecuaţiei (4.5) este

$$R(r) = A_l\, r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}.$$

Demonstraţie. a) Avem $F''(\varphi) + m^2 F(\varphi) = 0$ şi $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$, oricare ar fi φ.
b) Afirmaţia rezultă din teorema 4.12.
c) Utilizăm schimbarea de variabilă $r = \mathrm{e}^t$ şi de funcţie $Z(t) = R(\mathrm{e}^t)$ care conduce la $t = \ln r$, $\frac{d}{dr} = \mathrm{e}^{-t} \frac{d}{dt}$ şi la ecuaţia

$$Z'' + Z' - l(l+1)Z = 0$$

cu soluţia generală $Z(t) = A_l\, \mathrm{e}^{lt} + B_l\, \mathrm{e}^{-(l+1)t}$. Soluţia generală a ecuaţiei (4.5) este

$$R(r) = Z(\ln r) = A_l\, \mathrm{e}^{l \ln r} + B_l\, \mathrm{e}^{-(l+1)\ln r} = A_l\, r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}. \ \blacksquare$$

Observaţia 4.7 Din ultimele două propoziţii rezultă că funcţiile de forma

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\varphi) = R(r)\, Y(\theta,\varphi) &= R(r)\, T(\theta)\, F(\varphi) \\ &= \left(A_l\, r^l + \tfrac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l^m(\cos\theta)\, (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) \\ &= \left(A_l\, r^l + \tfrac{B_l}{r^{l+1}}\right) (a_m\, Y_l^m(\theta,\varphi) - b_m\, Y_l^{-m}(\theta,\varphi)) \end{aligned}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei Laplace, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ şi $l \in \{m,\, m+1,\, m+2, \ldots\}$.

Definiţia 4.18 *Funcţiile de forma*

$$Y_l(\theta,\varphi)=\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

cu $l\in\mathbb{N}$ *sunt numite* funcţii sferice de ordinul l.

Observaţia 4.8 Funcţiile de forma

$$u_l(r,\theta,\varphi)=\left(A_l\, r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right) Y_l(\theta,\varphi)$$

cu $l\in\mathbb{N}$ sunt soluţii ale ecuaţiei Laplace. Deoarece ecuaţia Laplace este o ecuaţie liniară, orice sumă finită de astfel de soluţii este soluţie. Mai mult, orice serie

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty} u_l(r,\theta,\varphi)$$

care este convergentă şi poate fi derivată termen cu termen defineşte o soluţie $u(r,\theta,\varphi)$ a ecuaţiei Laplace.

Teorema 4.19 *Fie*

$$f:\{\ (x,y,z)\ |\ \ x^2+y^2+z^2=R^2\ \}\longrightarrow\mathbb{R}$$

o funcţie continuă. Problema Dirichlet interioară

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u(R,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

admite soluţia $u:\{\ (x,y,z)\ |\ \ x^2+y^2+z^2\le R^2\ \}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^l\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

iar problema Dirichlet exterioară soluţia $u:\{\ (x,y,z)\ |\ \ x^2+y^2+z^2\ge R^2\ \}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

unde

$$a_{lm}=\frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0m})}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\,\langle Y_l^m,f\rangle. \tag{4.6}$$

Demonstraţie. Funcţiile indicate sunt soluţii ale ecuaţiei Laplace şi

$$u(R,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\,Y_l^m(\theta,\varphi).$$

Relaţia (4.6) rezultă din teorema 4.15. ▪

Exerciţiul 4.4 Să se determine soluţia problemei Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u(R,\theta,\varphi)=\sin^2\theta\,\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\theta\,\sin\varphi\end{cases}$$

în interiorul sferei de rază R cu centrul în origine.

Rezolvare. Ştim că soluţia este de forma

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^l\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$

şi

$$u(R,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\,Y_l^m(\theta,\varphi)=\sin^2\theta\,\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\theta\,\sin\varphi.$$

Deoarece (a se vedea exerciţiul 4.3)

$$\sin^2\theta\,\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\theta\,\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{6}\,Y_2^2(\theta,\varphi)-\frac{\sqrt{2}}{6}\,Y_2^{-2}(\theta,\varphi)+Y_1^1(\theta,\varphi)$$

prin identificare obţinem că

$$a_{lm}=\begin{cases}1 & \text{daca } l=1 \text{ si } m=1\\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \text{daca } l=2 \text{ si } m=2\\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \text{daca } l=2 \text{ si } m=-2\\ 0 & \text{in alte cazuri}\end{cases}$$

şi deci soluţia problemei considerate este

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\varphi)&=\tfrac{\sqrt{2}}{6}\,\left(\tfrac{r}{R}\right)^2\,Y_2^2(\theta,\varphi)-\tfrac{\sqrt{2}}{6}\,\left(\tfrac{r}{R}\right)^2\,Y_2^{-2}(\theta,\varphi)+\tfrac{r}{R}\,Y_1^1(\theta,\varphi)\\ &=\left(\tfrac{r}{R}\right)^2\sin^2\theta\,\cos\left(2\varphi-\tfrac{\pi}{4}\right)+\tfrac{r}{R}\,\sin\theta\,\sin\varphi.\end{aligned}$$

Observaţia 4.9 Programul MATHEMATICA oferă importante facilităţi în ceea ce priveşte polinoamele Legendre, funcţiile Legendre asociate şi funcţiile sferice.

Capitolul 5

Transformarea Fourier

5.1 Distribuţii temperate

Propoziţia 5.1 *Spaţiul $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ al funcţiilor indefinit derivabile*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu proprietatea că oricare ar fi $k, m \in \mathbb{N}$ există o constantă $c_{k,m}$ astfel încât

$$|x^k\, \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{k,m} \qquad oricare\ ar\ fi \quad x \in \mathbb{R}$$

considerat impreună cu operaţiile de adunare şi inmulţire cu scalari uzuale

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad (\lambda\, \varphi)(x) = \lambda\, \varphi(x)$$

este un spaţiu vectorial complex (numit spaţiul funcţiilor de probă *[17]).*

Demonstraţie. Deoarece

$$|x^k(\varphi + \psi)^{(m)}(x)| \leq |x^k\, \varphi^{(m)}(x)| + |x^k\, \psi^{(m)}(x)|$$
$$|x^k\, (\lambda\, \varphi)^{(m)}(x)| = |\lambda|\ |x^k\, \varphi^{(m)}(x)|$$

operaţiile adunare şi inmulţire cu scalari sunt bine definite, adică

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \ \varphi + \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

şi

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\\ \lambda \in \mathbb{C}\end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Verificarea axiomelor spaţiului vectorial este imediată. ∎

Exerciţiul 5.1 Oricare ar fi $a \in (0,\infty)$ funcţia

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$$

aparţine spaţiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definiţia 5.2 *Spunem că şirul* $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ *din* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge *la funcţia constantă* 0

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$$

dacă

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \, \varphi_n^{(m)}(x) \right| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

oricare ar fi $k, m \in \mathbb{N}$.

Definiţia 5.3 *Spunem că o funcţie liniară*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este continuă *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = 0.$$

Definiţia 5.4 *Prin* distribuţie temperată *se înţelege o aplicaţie*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

care este liniară şi continuă. In cazul unei distribuţii f *în loc de* $f(\varphi)$ *scriem* $\langle f, \varphi \rangle$.

Propoziţia 5.5 *Spaţiul distribuţiilor temperate*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{\ f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \textit{ este liniara si continua } \}$$

considerat împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari

$$\langle f+g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle, \qquad \langle \lambda\, f, \varphi \rangle = \lambda \, \langle f, \varphi \rangle$$

este un spaţiu vectorial.

Definiţia 5.6 *Spunem că funcţia*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este local integrabilă *dacă este integrabilă pe orice interval mărginit.*

Exemplul 5.2 Orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este local integrabilă.

Definiţia 5.7 *Spunem că funcţia*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este cu creştere lentă *dacă există* $k \in \mathbb{N}$ *şi* $M \in (0, \infty)$ *astfel încât*

$$\frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k} \leq M \qquad oricare\ ar\ fi\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 5.3 Orice funcţie polinomială este o funcţie cu creştere lentă. Funcţiile

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto \sin x \qquad si \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto \cos x$$

fiind marginite, sunt evident funcţii cu creştere lentă. Funcţia exponenţială

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \mapsto \mathrm{e}^x$$

nu este o funcţie cu creştere lentă.

Propoziţia 5.8 *Dacă funcţia local integrabilă* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *este cu creştere lentă atunci aplicaţia*

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

este distribuţie temperată.

Demonstraţie. Aplicaţia T_f este liniară

$$\langle T_f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle T_f, \varphi \rangle + \beta \langle T_f, \psi \rangle.$$

Funcţia f fiind cu creştere lentă, există $k \in \mathbb{N}$ şi $M \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k} \leq M \qquad \text{oricare ar fi} \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m\,\varphi_n(x)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ şi prin urmare

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi_n\rangle| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|\varphi_n(x)|\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{|f(x)|}{(1+x^2)^k}\,|(1+x^2)^k\varphi_n(x)|\,dx \leq M\int_{-\infty}^{\infty} |(1+x^2)^k\varphi_n(x)|\,dx \\
&= M\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{|(1+x^2)^{k+1}\varphi_n(x)|}{1+x^2}\,dx \leq M\sum_{m=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{|x^{2m}\varphi_n(x)|}{1+x^2}\,dx \\
&\leq M\sum_{m=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^m \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^{2m}\varphi_n(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{1+x^2}\,dx \\
&\leq \pi M\sum_{m=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^m \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^{2m}\varphi_n(x)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_f, \varphi_n\rangle = 0. \ \blacksquare$$

Definiţia 5.9 *Distribuţiile temperate definite de funcţii local integrabile cu creştere lentă sunt numite* distribuţii regulate *sau de tip funcţie. Celelalte distribuţii sunt numite* distribuţii singulare*.*

Observaţia 5.1 Utilizăm notaţia T_f pentru distribuţia corespunzătoare funcţiei clasice f pentru a sesiza mai uşor unde avem o funcţie clasică şi unde avem o distribuţie. In mod uzual, în loc de T_f se scrie tot f, deducându-se din context dacă este vorba despre funcţie clasică sau distribuţia corespunzătoare. Cititorul ştie din şcoală că la introducerea numerelor întregi, pentru a defini mai usor operaţiile cu numere întregi, se notează cu $+1$ numărul întreg corespunzător numărului natural 1, cu $+2$ numărul întreg corespunzător numărului natural 2, etc. După familiarizarea cu numerele întregi în loc de $+1$ se scrie 1, în loc de $+2$ se scrie 2, etc.

Propoziţia 5.10 *(Distribuţia Dirac). Aplicaţia*

$$\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$$

este o distribuţie temperată, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Aplicaţia δ_a este liniară

$$\langle \delta_a, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\varphi(a) + \beta\psi(a) = \alpha\langle \delta_a, \varphi\rangle + \beta\langle \delta_a, \beta\rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

şi prin urmare

$$|\langle \delta_a, \varphi_n\rangle| = |\varphi_n(a)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacksquare$$

Observaţia 5.2 Se poate arăta că distribuţia Dirac δ_a este o distribuţie singulară. In cazul în care $a = 0$ în loc de δ_0 se scrie simplu δ, adică avem

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0).$$

Propoziţia 5.11 *(Derivarea distribuţiilor). Dacă*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuţie temperată atunci aplicaţia

$$f' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle$$

este de asemenea o distribuţie temperată, numită derivata *lui f.*

Demonstraţie. Aplicaţia f' este liniară

$$\langle f', \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = -\langle f, \alpha\varphi' + \beta\psi'\rangle = -\alpha\langle f, \varphi'\rangle - \beta\langle f, \psi'\rangle = \alpha\langle f', \varphi\rangle + \beta\langle f', \psi\rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci şirul $(\varphi'_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \langle f', \varphi_n\rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle f, \varphi'_n\rangle = 0. \ \blacksquare$$

Observaţia 5.3 Orice distribuţie temperată este indefinit derivabilă. Derivata de ordin k a unei distribuţii f este distribuţia

$$f^{(k)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle f^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k\langle f, \varphi^{(k)}\rangle$$

Exemplul 5.4 Funcţia Heaviside

$$H:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad H(x)=\begin{cases}0 & daca \quad x<0\\ 1 & daca \quad x\geq 0\end{cases}$$

fiind local integrabilă şi cu creştere lentă defineşte distribuţia temperată

$$T_H:\mathcal{S}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \langle T_H,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx$$

şi

$$\langle (T_H)',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx=-\varphi(x)|_0^{\infty}=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle$$

adică avem

$$(T_H)'=\delta.$$

Observaţia 5.4 Funcţia Heaviside nu este derivabilă în 0

$$H'(x)=\begin{cases}0 & daca \quad x\neq 0\\ \text{nu exista} & daca \quad x=0\end{cases}$$

dar distribuţia corespunzătoare este indefinit derivabilă

$$(T_H)'=\delta,\qquad (T_H)''=\delta',\qquad (T_H)'''=\delta'',\ \ldots$$

Exerciţiul 5.5 Fie funcţia

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}x^2 & daca \quad x\leq 0\\ \sqrt{x}+2 & daca \quad x>0.\end{cases}$$

Să se arate că

$$(T_f)'=T_{f'}+2\delta$$

Rezolvare. Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}\langle (T_f)',\varphi\rangle &= -\langle T_f,\varphi'\rangle=-\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi'(x)\,dx\\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{0}x^2\,\varphi'(x)\,dx+\int_0^{\infty}(\sqrt{x}+2)\varphi'(x)\,dx\\ &= -x^2\,\varphi(x)|_{-\infty}^{0}+\textstyle\int_{-\infty}^{0}2x\,\varphi(x)\,dx\\ &\qquad -(\sqrt{x}+2)\varphi(x)|_0^{\infty}+\textstyle\int_0^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,dx\\ &= 2\varphi(0)+\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\,\varphi(x)\,dx=\langle (T_{f'})+2\delta,\varphi\rangle\end{aligned}$$

unde f' este derivata clasică

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & daca \quad x < 0 \\ nu\ exista & daca \quad x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & daca \quad x > 0 \end{cases}$$

prelungită arbitrar în $x = 0$.

Observaţia 5.5 Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă clasic atunci derivata

$$\begin{aligned} &(T_f)' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \\ &\langle (T_f)', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, \varphi'(x)\, dx \\ &\qquad = -x^n\, \varphi'(x)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, \varphi'(x)\, dx \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} n x^{n-1}\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \varphi(x)\, dx \end{aligned}$$

a distribuţiei T_f este distribuţia regulată definită de derivata clasică $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. De exemplu, derivata distribuţiei regulate corespunzătoare funcţiei $f(x) = x^n$ este distribuţia regulată care corespunde funcţiei $f'(x) = nx^{n-1}$

$$(T_{x^n})' = T_{nx^{n-1}}.$$

Derivarea în sensul distribuţiilor prelungeşte operaţia de derivare clasica la cazuri în care ea nu este aplicabilă.

Propoziţia 5.12 *(Multiplicarea unei distribuţii cu x^k) Dacă $k \in \mathbb{N}$ şi*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuţie temperată atunci aplicaţia

$$x^k f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle x^k f, \varphi\rangle = \langle f, x^k \varphi\rangle$$

este de asemenea o distribuţie temperată.

Demonstraţie. Aplicaţia $x^k\, f$ este liniară

$$\langle x^k f, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\langle f, x^k\varphi\rangle + \beta\langle f, x^k\psi\rangle = \alpha\langle x^k f, \varphi\rangle + \beta\langle x^k f, \psi\rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci şirul $(x^k\varphi_n)_{n\geq 0}$ este un şir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}\langle x^k f,\varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f, x^k\varphi_n\rangle = 0. \;\blacksquare$$

Observaţia 5.6 Se poate arăta că aplicaţia

$$\vartheta f:\mathcal{S}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \langle\vartheta f,\varphi\rangle = \langle f,\vartheta\varphi\rangle$$

este o distribuţie dacă f este distribuţie şi dacă ϑ aparţine muţimii $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ a funcţiilor indefinit derivabile

$$\vartheta:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

cu proprietatea că oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$ există $m\in\mathbb{N}$ şi $C\in(0,\infty)$ încât

$$|\vartheta^{(k)}(x)|\leq C(1+|x|)^m,\qquad \text{oricare ar fi}\;\; x\in\mathbb{R}.$$

Exerciţiul 5.6 Să se arate că dacă $\vartheta\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ atunci

$$\vartheta\delta_a = \vartheta(a)\,\delta_a.$$

Rezolvare. Avem

$$\langle\vartheta\delta_a,\varphi\rangle = \langle\delta_a,\vartheta\varphi\rangle = (\vartheta\varphi)(a) = \vartheta(a)\,\varphi(a) = \vartheta(a)\langle\delta_a,\varphi\rangle = \langle\vartheta(a)\,\delta_a,\varphi\rangle$$

oricare ar fi $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exerciţiul 5.7 Să se arate că relaţiile

$$x\delta^{(k)} = -k\delta^{(k-1)}\qquad\qquad x^k\delta^{(k)} = (-1)^k k!\,\delta$$

au loc oricare ar fi $k\in\{1,2,3,\ldots\}$.

Rezolvare. Utilizând formula lui Leibniz

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, f^{(j)}\, g^{(k-j)}$$

obţinem

$$\langle x\delta^{(k)},\varphi\rangle = \langle \delta^{(k)}, x\varphi\rangle = (-1)^k\langle \delta, (x\varphi)^{(k)}\rangle = (-1)^k\langle \delta, x\varphi^{(k)} + k\varphi^{(k-1)}\rangle$$
$$= (-1)^k k\varphi^{(k-1)}(0) = -k(-1)^{k-1}\langle \delta, \varphi^{(k-1)}\rangle = -k\langle \delta^{(k-1)},\varphi\rangle = \langle -k\delta^{(k-1)},\varphi\rangle$$

şi

$$\langle x^k\delta^{(k)},\varphi\rangle = \langle \delta^{(k)}, x^k\varphi\rangle = (-1)^k\langle \delta, (x^k\varphi)^{(k)}\rangle$$
$$= (-1)^k\left\langle \delta, \textstyle\sum_{j=0}^k C_k^j (x^k)^{(j)}\varphi^{(k-j)}\right\rangle = (-1)^k\left\langle \delta, C_k^k(x^k)^{(k)}\varphi\right\rangle = \langle (-1)^k k!\delta,\varphi\rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definiţia 5.13 *Spunem că şirul de distribuţii* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge la distribuţia* f

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle, \qquad oricare\ ar\ fi\quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Figura 5.1

Exerciţiul 5.8 Funcţiei (a se vedea figura 5.1)

$$f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & daca \quad |x|\leq \frac{1}{n} \\ 0 & daca \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

îi corespunde distribuţia regulată

$$T_{f_n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)\,dx$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = \delta.$$

Rezolvare. Utilizând schimbarea de variabilă $t = nx$ obţinem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle T_{f_n}, \varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{2}\textstyle\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\textstyle\int_{-1}^{1} \varphi\left(\tfrac{t}{n}\right)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(0)\,dt = \varphi(0) = \langle\delta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Exerciţiul 5.9 Funcţiei (a se vedea figura 5.2)

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin nx}{x}$$

îi corespunde distribuţia regulată

$$T_{f_n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x}\,\varphi(x)\,dx$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = \delta.$$

Rezolvare. Utilizând relaţia (1.10) şi schimbarea de variabilă $t = nx$ obţinem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle T_{f_n}, \varphi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{\sin nx}{x}\,\varphi(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{\sin t}{t}\varphi\left(\tfrac{t}{n}\right)\,dt = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\sin t}{t}\varphi(0)\,dt = \varphi(0) = \langle\delta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Observaţia 5.7 Funcţia

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

nu este local integrabilă şi aplicaţia

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \ \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

nu este distribuţie temperată. Se poate însă arăta că aplicaţia

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right)$$

este distribuţie (numită *valoare principală* a lui $\frac{1}{x}$.)

Exerciţiul 5.10 Să se arate că

$$x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} \left\langle x \cdot \mathcal{P}\tfrac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\tfrac{1}{x}, x\,\varphi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \tfrac{x\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{x\varphi(x)}{x}\, dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exerciţiul 5.11 Fie funcţia

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln |x|.$$

Să se arate aplicaţia

$$\tilde{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \left\langle \tilde{f}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln |x|\, \varphi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln |x|\, \varphi(x)\, dx \right)$$

este distribuţie temperată şi

$$(\tilde{f})' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părţi obţinem

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{f})', \varphi \rangle = -\langle \tilde{f}, \varphi' \rangle &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\, \varphi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln x\, \varphi(x)\, dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \tfrac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{\varphi(x)}{x}\, dx \right) = \langle \mathcal{P}\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.2 Transformarea Fourier

Definiţia 5.14 *Fie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Funcţia*

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, dx$$

(în cazul în care există) se numeşte transformata Fourier *a lui φ.*

Exerciţiul 5.12 Fie $a \in (0, \infty)$ şi

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & daca \quad |x| \le a \\ 0 & daca \quad |x| > a. \end{cases}$$

Să se arate că

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{2}{\xi} \sin a\xi.$$

Rezolvare. Pentru $\xi \neq 0$ avem

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, dx = \frac{1}{\mathrm{i}\xi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \Big|_{-a}^{a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}}{\mathrm{i}\xi} = \frac{2}{\xi} \sin a\xi.$$

Exerciţiul 5.13 Să se arate că

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}](\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Considerând integrala în sensul valorii principale avem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}](\xi) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{e}^{-a|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|} (\cos \xi x + \mathrm{i} \sin \xi x)\, dx \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|} \cos \xi x\, dx = 2 \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos \xi x\, dx. \end{aligned}$$

Integrând de două ori prin părţi obţinem relaţia

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos \xi x\, dx = \frac{1}{\xi} \mathrm{e}^{-ax} \sin \xi x \Big|_0^\infty + \frac{a}{\xi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \sin \xi x\, dx \\ &\quad = -\textstyle\frac{a}{\xi^2} \mathrm{e}^{-ax} \cos \xi x \Big|_0^\infty - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos \xi x\, dx = \frac{a}{\xi^2} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos \xi x\, dx \end{aligned}$$

adică
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx = \frac{a}{\xi^2} - \frac{a^2}{\xi^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx$$
din care deducem
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos\xi x\,dx = \frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

Propoziţia 5.15 *Dacă $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ atunci transformata Fourier a lui φ*

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,dx$$

aparţine de asemenea spaţiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si au loc relaţiile

$$(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} = \mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k\varphi] \qquad\qquad \mathcal{F}[\varphi^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k\,\mathcal{F}[\varphi].$$

Demonstraţie. Aplicaţia $\mathcal{F}[\varphi]$ se defineşte cu ajutorul unei integrale improprii cu parametru. Din definiţia spaţiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ rezultă că există $M \in (0,\infty)$ astfel încât

$$|x^2\varphi(x)| \le M \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}.$$

Din acestă relaţie rezultă că pentru $x \neq 0$ avem majorarea

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)| \le \frac{M}{x^2}.$$

Convergenţa integralei $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,dx$ rezultă din convergenţa integralelor

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx \qquad\qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

pe baza criteriului comparaţiei. Din faptul că φ descreşte la infinit mai repede decât orice putere a lui x rezultă posibilitatea de a deriva sub integrală de un număr nelimitat de ori. Se obţine astfel relaţia

$$(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}x)^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\varphi(x)\,dx.$$

convergenţa integralei rezultând din existenţa unei constante $M_k \in (0,\infty)$ astfel încât

$$|x^{k+2}\varphi(x)| \le M_k \qquad \text{oricare ar fi } \ x \in \mathbb{R}$$

şi a majorării

$$|(\mathrm{i}x)^k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \varphi(x)| \leq \frac{M_k}{x^2}.$$

Deducem astfel că transformata Fourier $\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcţie indefinit derivabilă şi cu derivatele funcţii mărginite. Relaţia

$$\mathcal{F}[\varphi^{(k)}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi^{(k)}(x)\, dx = (-\mathrm{i}\xi)^k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\, dx = (-\mathrm{i}\xi)^k \mathcal{F}[\varphi](\xi)$$

obţinută utilizând integrarea prin părţi conduce la egalitatea

$$|\, \xi^k\, \mathcal{F}[\varphi](\xi)\, | = |\, \mathcal{F}[\varphi^{(k)}](\xi)\, |$$

care arată că $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. ∎

Exerciţiul 5.14 Să se arate că

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Rezolvare. A se vedea exerciţiul 1.5 .

Teorema 5.16 *Transformarea Fourier a funcţiilor de probă*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) :\ \varphi \mapsto \mathcal{F}[\varphi], \qquad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\, dx$$

este o aplicaţie bijectivă şi inversa ei este transformarea

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) :\ \psi \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\psi], \qquad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi)\, d\xi.$$

Demonstraţie. Oricare ar fi $a \in (0, \infty)$ avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\, \mathrm{e}^{-a\xi^2 - \mathrm{i}\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi y}\, dy\right]\ \mathrm{e}^{-a\xi^2 - \mathrm{i}\xi x} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(y-x)}\, \mathrm{e}^{-a\xi^2}\, d\xi\right] dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{4a}} dy.$$

Utilizând schimbarea de variabilă $y = x + 2\sqrt{a}t$ obţinem relaţia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\, \mathrm{e}^{-a\xi^2 - \mathrm{i}\xi x} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\sqrt{a}t)\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

care pentru $a \searrow 0$ devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-t^2} dt = 2\pi\, \varphi(x) \tag{5.1}$$

adică

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \varphi$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Relaţia (5.1) s-a obţinut utilizând formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Similar se poate arăta că

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] = \varphi. \ \blacksquare$$

Observaţia 5.8 Din relaţia (5.1) care se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi y} \varphi(y)\, dy \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} d\xi = \varphi(x)$$

rezultă variantele alternative pentru definiţia transformării Fourier

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, dx \qquad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \psi(\xi)\, d\xi$$

sau

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, dx \qquad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Observaţia 5.9 Transformările Fourier directă şi inversă au expresii foarte asemanatoare. Utilizând schimbarea de variabilă $\xi = -y$ obţinem

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \psi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \psi(-y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\breve{\psi}](x)$$

adică

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\breve{\psi}]$$

unde $\breve{\psi}$ este aplicaţia

$$\breve{\psi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \breve{\psi}(y) = \psi(-y).$$

Teorema 5.17 *Dacă* $\kappa \in (0,\infty)$ *atunci transformarea*

$$\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \ \varphi \mapsto \tilde{\mathcal{F}}[\varphi], \qquad \tilde{\mathcal{F}}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi x}\varphi(x)\,dx$$

este bijectivă şi inversa ei este transformarea

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \ \psi \mapsto \tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\psi], \qquad \tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\psi](x) = \frac{\kappa}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\xi x}\psi(\xi)\,d\xi.$$

Demonstraţie. Oricare ar fi $a \in (0,\infty)$ avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)\,\mathrm{e}^{-a\xi^2-\mathrm{i}\kappa\xi x}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi y}\,dy\right]\,\mathrm{e}^{-a\xi^2-\mathrm{i}\kappa\xi x}d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi(y-x)}\,\mathrm{e}^{-a\xi^2}\,d\xi\right]dy = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,\mathrm{e}^{-\frac{\kappa^2(y-x)^2}{4a}}dy.$$

Utilizând schimbarea de variabilă $y = x + 2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t$ obţinem relaţia

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)\,\mathrm{e}^{-a\xi^2-\mathrm{i}\xi x}d\xi = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x+2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t\right)\,\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

care pentru $a \searrow 0$ devine

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}d\xi = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-t^2}dt = \frac{2\pi}{\kappa}\,\varphi(x) \tag{5.2}$$

adică

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\tilde{\mathcal{F}}[\varphi]] = \varphi$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Relaţia (5.2) s-a obţinut utilizând formula

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Similar se poate arăta că

$$\tilde{\mathcal{F}}[\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\varphi]] = \varphi. \ \blacksquare$$

Observaţia 5.10 Alegând $\kappa = 2\pi$ obţinem variantele alternative pentru definiţia transformării Fourier

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,dx \qquad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi)\,d\xi$$

şi

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,dx \qquad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi x}\psi(\xi)\,d\xi.$$

Teorema 5.18 *Dacă*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuţie temperată atunci aplicaţia

$$\mathcal{F}[f] : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

este de asemenea o distribuţie temperată (numită transformata Fourier *a lui f).*

Demonstraţie. A se vedea [17].

Propoziţia 5.19 *Transformarea Fourier a distribuţiilor*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \ f \mapsto \mathcal{F}[f], \qquad \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

este bijectivă şi inversa ei este

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \ f \mapsto \mathcal{F}^{-1}[f], \qquad \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle.$$

Demonstraţie. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]]\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

şi

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]]\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ▪

Exerciţiul 5.15 Să se arate că

$$\mathcal{F}[\delta] = 1 \qquad\qquad \mathcal{F}[1] = 2\pi\,\delta.$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}0x} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[\delta], 2\pi\mathcal{F}^{-1}[\breve{\varphi}] \rangle = \langle \delta, 2\pi\breve{\varphi} \rangle = 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta, \varphi \rangle.$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Propoziţia 5.20 *Relaţiile*

$$(\mathcal{F}[f])^{(k)} = \mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k f] \qquad\qquad \mathcal{F}[f^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k\, \mathcal{F}[f].$$

au loc oricare ar fi distribuţia temperată f

Demonstraţie. Utilizând proprietăţile transformării Fourier a funcţiilor de probă (propoziţia 5.15) obţinem

$$\begin{aligned}\langle(\mathcal{F}[f])^{(k)},\varphi\rangle &= (-1)^k\langle\mathcal{F}[f],\varphi^{(k)}\rangle = (-1)^k\langle f,\mathcal{F}[\varphi^{(k)}]\rangle\\ &= (-1)^k\langle f,(-\mathrm{i}\xi)^k\,\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle(\mathrm{i}\xi)^k\, f,\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle\mathcal{F}[(\mathrm{i}\xi)^k\, f],\varphi\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}[f^{(k)}],\varphi\rangle &= \langle f^{(k)},\mathcal{F}[\varphi]\rangle = (-1)^k\langle f,(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)}\rangle\\ &= (-1)^k\langle f,\mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k\varphi]\rangle = (-1)^k\langle\mathcal{F}[f],(\mathrm{i}x)^k\varphi\rangle = \langle(-\mathrm{i}x)^k\mathcal{F}[f],\varphi\rangle\end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ şi $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ∎

Exerciţiul 5.16 Să se arate că

$$\mathcal{F}[\delta_a] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\delta_a+\delta_{-a})\right] = \cos ax \qquad \mathcal{F}[\cos ax] = \pi(\delta_a+\delta_{-a}).$$

Rezolvare. Avem

$$\langle\mathcal{F}[\delta_a],\varphi\rangle = \langle\delta_a,\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \mathcal{F}[\varphi](a) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\varphi(x)\,dx = \langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax},\varphi\rangle$$

Transformarea Fourier fiind liniară obţinem

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\delta_a+\delta_{-a})\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}[\delta_a]+\mathcal{F}[\delta_{-a}]\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}}{2} = \cos ax.$$

Din relaţia precedentă rezultă ca

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos ax] = \frac{1}{2}(\delta_a+\delta_{-a}).$$

Dar efectuând schimbarea de variabilă $x\mapsto -x$ obţinem

$$\langle\mathcal{F}[\cos ax],\varphi\rangle = \langle\cos ax,\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos ax\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\varphi(t)dt\right)dx$$

$$= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos ax\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\varphi(t)dt\right)dx = \langle\cos ax,2\pi\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle = \langle 2\pi\mathcal{F}^{-1}[\cos ax],\varphi\rangle$$

adică

$$\mathcal{F}[\cos ax] = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[\cos ax].$$

Exercițiul 5.17 Să se arate că

$$\mathcal{F}[x^k] = 2\pi(-\mathrm{i})^k\,\delta^{(k)} \qquad\qquad \mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k.$$

Rezolvare. Avem

$$\mathcal{F}[x^k] = (-\mathrm{i})^k\,\mathcal{F}[(\mathrm{i}x)^k\,1] = (-\mathrm{i})^k\,(\mathcal{F}[1])^{(k)} = 2\pi(-\mathrm{i})^k\,\delta^{(k)}$$

şi

$$\mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-\mathrm{i}\xi)^k\mathcal{F}[\delta] = (-\mathrm{i}\xi)^k\,1 = (-\mathrm{i}\xi)^k.$$

Observaţia 5.11 Transformarea Fourier joacă un rol fundamental în matematică şi în aplicaţiile ei. Integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,x^k\,dx$$

nefiind convergentă pentru $k \in \mathbb{N}$, rezultă că funcţiile constante şi cele polinomiale nu admit transformate Fourier dacă ne limităm la abordarea clasică. Utilizarea distribuţiilor temperate largeşte considerabil posibilităţile de utilizare a transformării Fourier.

Exercițiul 5.18 Fie T_H distribuţia regulată corespunzătoare funcţiei Heaviside

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad H(x) = \begin{cases} 0 & daca \quad x < 0 \\ 1 & daca \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Să se arate că

$$\mathcal{F}[T_H] = -\mathrm{i}\,\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \pi\,\delta.$$

Rezolvare. Plecând de la relaţia $(T_H)' = \delta$ deducem succesiv

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}[(T_H)'] = 1 \\ &-\mathrm{i}x\,\mathcal{F}[T_H] = 1 \\ &\mathcal{F}[T_H] = -\mathrm{i}\,\mathcal{P}\tfrac{1}{x} + C\,\delta \end{aligned}$$

unde C este o constantă. Ultima relaţie este echivalentă cu

$$\langle \mathcal{F}[T_H], \varphi \rangle = -\mathrm{i} \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle + C\langle \delta, \varphi \rangle, \qquad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{5.3}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T_H], \mathrm{e}^{-x^2} \rangle &= \langle T_H, \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}] \rangle = \langle T_H, \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}} \rangle \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} dt = \pi \end{aligned}$$

şi

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \mathrm{e}^{-x^2} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\, dx \right) = 0$$

rezultă că în cazul $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ relaţia (5.3) devine $\pi = C\,\langle \delta, \mathrm{e}^{-x^2} \rangle = C$.

Exerciţiul 5.19 Să se arate că

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = \pi\mathrm{i}\, T_{\mathrm{sign}}.$$

unde T_{sign} este distribuţia regulată corespunzătoare funcţiei

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \textit{daca} \quad x < 0 \\ 0 & \textit{daca} \quad x = 0 \\ 1 & \textit{daca} \quad x > 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Plecând de la relaţia $x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$ deducem succesiv

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[x \cdot \mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right] = 2\pi\, \delta \\ &-\mathrm{i}\mathcal{F}\left[\mathrm{i}x \cdot \mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right] = 2\pi\, \delta \\ &-\mathrm{i}\left(\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right]\right)' = 2\pi\, \delta \\ &\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\tfrac{1}{x}\right] = 2\pi\mathrm{i}\, H + C \end{aligned}$$

unde C este o constantă. Ultima relaţie este echivalentă cu

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right], \varphi \right\rangle = 2\pi\mathrm{i}\,\langle H, \varphi \rangle + C\langle 1, \varphi \rangle, \qquad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{5.4}$$

Deoarece

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right], \mathrm{e}^{-x^2} \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \right\rangle = 0$$

în cazul $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ relaţia (5.4) devine

$$0 = 2\pi \mathrm{i} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx + C \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

şi conduce la $C = -\pi \mathrm{i}$. Dar $2\pi \mathrm{i}\, H - \pi \mathrm{i}$ şi sign definesc aceeaşi distribuţie .

Capitolul 6

Grupuri şi reprezentările lor liniare

6.1 Grupuri

Vom prezenta câteva elemente referitoare la grupuri şi reprezentările lor liniare.

Definiţia 6.1 *Prin* grup *se înţelege o mulţime G pe care este definită o lege de compoziţie internă*

$$G \times G \longrightarrow G: \ (x, y) \mapsto x\, y$$

satisfăcând condiţiile:

1) $(g_1 g_2)g_3 = g_1(g_2 g_3), \quad \forall g_1,\, g_2,\, g_3 \in G$;

2) există $e \in G$ astfel încât $ge = eg = g, \quad \forall g \in G$;

3) oricare ar fi $g \in G$ există $g^{-1} \in G$ astfel încât $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Grupul este numit grup comutativ *(sau abelian) dacă, în plus,*

4) $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1,\, g_2 \in G$.

Propoziţia 6.2 *a) Elementul e cu proprietatea*

$$ge = eg = g, \quad \forall g \in G$$

este unic în G şi se numeşte element neutru.
b) Pentru orice $g \in G$ elementul g^{-1} cu proprietatea

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

este unic în G şi se numeşte inversul lui g.

Demonstraţie. Avem

$$\left.\begin{array}{l} ge = eg = g, \quad \forall g \in G \\ ge' = e'g = g, \quad \forall g \in G \end{array}\right\} \implies \quad e = ee' = e'$$

şi

$$\left.\begin{array}{r} gg^{-1} = g^{-1}g = e \\ gh = hg = e \end{array}\right\} \implies h = he = h(gg^{-1}) = (hg)g^{-1} = eg^{-1} = g^{-1}. \blacksquare$$

Observaţia 6.1 In cazul în care în locul notaţiei multiplicative $g_1 g_2$ se utilizează notaţia aditivă $g_1 + g_2$ elementul neutru este notat cu 0. Elementul h cu proprietatea $h + g = g + h = 0$ este notat cu $-g$ şi numit *opusul* lui g.

6.2 Reprezentări liniare

Definiţia 6.3 *Fie G şi G' două grupuri. O aplicaţie*

$$f : G \longrightarrow G'$$

este numită morfism de grupuri *dacă*

$$f(g_1 g_2) = f(g_1)\, f(g_2), \qquad \forall g_1,\, g_2 \in G.$$

Exerciţiul 6.1 Mulţimea tuturor automorfismelor unui spaţiu vectorial V

$$GL(V) = \{\, A : V \longrightarrow V \mid A \text{ este liniara si bijectiva } \}$$

împreună cu operaţia de compunere este un grup (*grupul automorfismelor* lui V).

Definiţia 6.4 *Prin* reprezentare liniară *a grupului G în spaţiul vectorial V peste corpul $\mathbb{K}$ (numită şi* reprezentare $\mathbb{K}$-liniară*) se înţelege un morfism de grupuri*

$$T : G \longrightarrow GL(V) : \;\; g \mapsto T(g)$$

adică o aplicaţie astfel încât

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)\, T(g_2), \qquad \forall g_1,\, g_2 \in G.$$

Dimensiunea reprezentării este prin definiţie dimensiunea spaţiului vectorial V.

Exerciţiul 6.2 Mulţimea matricelor inversabile de ordinul n cu elemente din $\mathbb{K}$

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{\, A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \; \det A \neq 0 \,\}$$

împreună cu înmulţirea matricelor este grup (se numeşte *grupul general linear*).

Definiţia 6.5 *Prin* reprezentare matriceală *n-dimensională a unui grup G se înţelege un morfism de grupuri de forma*

$$T : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : \;\; g \mapsto T(g).$$

Reprezentarea este numită reală în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ şi complexă în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Propoziţia 6.6 *Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază a lui V şi*

$$T : G \longrightarrow GL(V) : \ g \mapsto T(g)$$

o reprezentare liniară a unui grup G în V atunci aplicaţia

$$\mathcal{T} : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : \ g \mapsto \mathcal{T}(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & t_{12}(g) & \cdots & t_{1n}(g) \\ t_{21}(g) & t_{22}(g) & \cdots & t_{2n}(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}(g) & t_{n2}(g) & \cdots & t_{nn}(g) \end{pmatrix}$$

unde elementele $t_{ij}(g)$ sunt astfel încât

$$T(g)e_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(g)e_i, \qquad \forall g \in G, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

este o reprezentare matriceală n-dimensională a lui G.

Demonstraţie. Deoarece $T(g_1g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$, din relaţiile

$$\begin{aligned} T(g_1g_2)e_j \ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} t_{ij}(g_1g_2)e_i \\ T(g_1)\,T(g_2)e_j \ &= T(g_1) \textstyle\sum_{k=1}^{n} t_{kj}(g_2)e_k = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}(g_2)T(g_1)e_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} t_{kj}(g_2) \sum_{i=1}^{n} t_{ik}(g_1)e_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ik}(g_1)t_{kj}(g_2)\right) e_i \end{aligned}$$

rezultă că

$$t_{ij}(g_1g_2) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}(g_1)\,t_{kj}(g_2), \qquad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

adică $\mathcal{T}(g_1g_2) = \mathcal{T}(g_1)\,\mathcal{T}(g_2)$. ∎

Observaţia 6.2 Matricea $\mathcal{T}(g)$ este matricea transformării liniare $T(g) : V \longrightarrow V$ în raport cu baza considerată. Alegând o altă bază $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ se poate defini în mod similar reprezentarea

$$\mathcal{T}' : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : \ g \mapsto \mathcal{T}'(g).$$

Ştim însă că cele două reprezentări matriceale sunt legate prin relaţia

$$\mathcal{T}'(g) = S^{-1}\, \mathcal{T}(g)\, S, \qquad \forall g \in G$$

unde S este matricea de trecere de la baza $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$.

Definiţia 6.7 *Două reprezentări matriceale n-dimensionale peste* $\mathbb{K}$ *ale unui grup*

$$\mathcal{T}_1 : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) \qquad si \qquad \mathcal{T}_2 : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

sunt numite echivalente *dacă există* $S \in GL(n, \mathbb{K})$ *astfel încât*

$$\mathcal{T}_2(g) = S^{-1}\, \mathcal{T}_1(g)\, S, \qquad \forall g \in G.$$

Exerciţiul 6.3 Aplicaţia $R : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) : \, t \mapsto R(t)$ unde

$$R(t) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad R(t)(x, y) = (x\, \cos t - y\, \sin t,\, x\, \sin t + y\, \cos t)$$

este o reprezentare liniară a grupului aditiv $(\mathbb{R}, +)$ în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$.
Alegând în $\mathbb{R}^2$ baza $\{e_1 = (1, 0),\, e_2 = (0, 1)\}$ obţinem reprezentarea matriceală

$$\mathcal{R} : \mathbb{R} \longrightarrow GL(2, \mathbb{R}) : \, t \mapsto \mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Avem $\mathcal{R}(t + s) = \mathcal{R}(t)\, \mathcal{R}(s)$.

6.3 Reprezentări ireductibile

Definiţia 6.8 *Două reprezentări liniare n-dimensionale peste $\mathbb{K}$ ale unui grup G*

$$T_1 : G \longrightarrow GL(V_1) \qquad si \qquad T_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$$

sunt numite echivalente *dacă există un izomorfism liniar $S : V_1 \longrightarrow V_2$ astfel încât*

$$T_1(g) = S^{-1}\, T_2(g)\, S, \qquad \forall g \in G$$

adică astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T_1(g)"] \arrow[d, "S"] & V_1 \arrow[d, "S"] \\ V_2 \arrow[r, "T_2(g)"] & V_2 \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Definiţia 6.9 *Fie $T : G \longrightarrow GL(V)$ o reprezentare liniară a grupului G în V. Spunem că subspaţiul vectorial $W \subseteq V$ este* invariant *faţă de T dacă*

$$T(g)(W) \subseteq W, \qquad \forall g \in G.$$

Definiţia 6.10 *Spunem că reprezentarea liniară*

$$T : G \longrightarrow GL(V)$$

este o reprezentare ireductibilă *dacă singurele subspaţii invariante sunt $\{0\}$ şi V. In caz contrar, reprezentarea este numită* reductibilă.

Exerciţiul 6.4 Reprezentarea liniară $T : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^3) : \, t \mapsto T(t)$ unde

$$T(t) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \;\; T(t)(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t,\, x \sin t + y \cos t,\, z)$$

este o reprezentare liniară reductibilă a grupului aditiv $(\mathbb{R}, +)$ în $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Subspaţiul $W = \{\, (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\} \subset \mathbb{R}^3$ este subspaţiu invariant.

Propoziţia 6.11 *Dacă*

$$T_1 : G \longrightarrow GL(V_1) \qquad si \qquad T_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$$

sunt două reprezentări $\mathbb{K}$*-liniare atunci aplicaţia*

$$T : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2), \qquad T(g)(x_1, x_2) = (T_1(g)x_1, T_2(g)x_2)$$

este o reprezentare $\mathbb{K}$*-liniară a grupului* G *în spaţiul produs direct* $V_1 \oplus V_2$*, numită* suma reprezentărilor T_1 *şi* T_2*, notată cu* $T_1 \oplus T_2$*.*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} T(g_1g_2)(x_1, x_2) &= (T_1(g_1g_2)x_1, T_2(g_1g_2)x_2) \\ &= (T_1(g_1)\,T_1(g_2)x_1,\; T_2(g_1)\,T_2(g_2)x_2) \\ &= T(g_1)(T_1(g_2)x_1,\; T_2(g_2)x_2) = T(g_1)T(g_2)(x_1, x_2). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Propoziţia 6.12 *Dacă*

$$\mathcal{T} : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : \ g \mapsto \mathcal{T}(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & \cdots & t_{1n}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & \cdots & t_{nn}(g) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R} : G \longrightarrow GL(k, \mathbb{K}) : \ g \mapsto \mathcal{R}(g) = \begin{pmatrix} r_{11}(g) & \cdots & r_{1k}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{k1}(g) & \cdots & r_{kk}(g) \end{pmatrix}$$

sunt două reprezentări matriceale atunci

$$\mathcal{T} \oplus \mathcal{R} : G \longrightarrow GL(n+k, \mathbb{K}) : \ g \mapsto \begin{pmatrix} t_{11}(g) & \cdots & t_{1n}(g) & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & \cdots & t_{nn}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{11}(g) & \cdots & r_{1k}(g) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{k1}(g) & \cdots & r_{kk}(g) \end{pmatrix}$$

este o reprezentare matriceală a lui G*, numită* suma reprezentărilor $\mathcal{T}$ *şi* $\mathcal{R}$*.*

6.4 Reprezentări unitare şi ortogonale

Definiţia 6.13 *O submulţime $H\subseteq G$ este numită* subgrup *al grupului G dacă*

$$\left.\begin{array}{l} g_1\in H\\ g_2\in H \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad g_1g_2^{-1}\in H.$$

Exerciţiul 6.5 Fie V un spaţiu vectorial euclidian complex. Mulţimea transformărilor unitare

$$U(V)=\{\ A:V\longrightarrow V\ |\ \langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle,\quad \forall x,y\in V\ \}$$

este un subgrup al grupului $GL(V)$ al tuturor automorfismelor lui V.

Definiţia 6.14 *Prin* reprezentare unitară *a grupului G în spaţiul vectorial euclidian complex V se înţelege un morfism de grupuri*

$$T:G\longrightarrow U(V).$$

Observaţia 6.3 Dacă $T:G\longrightarrow U(V)$ este o reprezentare unitară atunci

$$\langle T(g)x,T(g)y\rangle=\langle x,y\rangle,\qquad \forall x,y\in V,\quad \forall g\in G.$$

Exerciţiul 6.6 Fie $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ o matrice cu n linii şi n coloane cu elemente numere complexe şi fie $A^*={}^t\bar{A}$ adjuncta ei. Relaţiile

$$A\,A^*=I,\qquad A^*\,A=I,\qquad A^{-1}=A^*.$$

unde $I\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ este matricea unitate, sunt echivalente.

Definiţia 6.15 *Matricea $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ este numită* matrice unitară *dacă*

$$A^*\,A=I$$

(condiţie echivalentă cu $A^{-1}=A^*$ şi $A\,A^*=I$).

Observaţia 6.4 Dacă A este o matrice unitară atunci $|\mathrm{det}A|=1$. Intr-adevăr

$$A^*\,A=I\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{det}A\ \mathrm{det}A^*=1\quad\Longrightarrow\quad |\mathrm{det}A|^2=1.$$

Teorema 6.16 *Mulţimea matricelor unitare de ordinul n*

$$U(n) = \{\, A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \ | \ \ A^*\, A = I \ \}$$

are o structură de grup în raport cu înmulţirea matricelor, iar

$$SU(n) = \{\, A \in U(n) \ | \ \ \det A = 1 \ \}$$

este un subgrup al lui $U(n)$.

Demonstraţie. a) Produsul a două matrice unitare A şi B este o matrice unitară

$$(AB)^*\,(AB) = B^*A^*AB = B^*B = I$$

şi inversa unei matrice unitare A este o matrice unitară

$$A^{-1} = A^* \quad \Longrightarrow \quad (A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}.$$

b) Afirmaţia rezultă din relaţiile

$$\det(AB) = \det A\ \det B, \qquad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}. \ \blacksquare$$

Definiţia 6.17 *Prin* reprezentare matriceală unitară *a grupului G se înţelege un morfism de grupuri*

$$T : G \longrightarrow U(n).$$

Exerciţiul 6.7 Fie V un spaţiu vectorial euclidian real. Mulţimea transformărilor ortogonale

$$O(V) = \{\ A : V \longrightarrow V \ | \ \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \ \ \forall x, y \in V\,\}$$

este un subgrup al grupului $GL(V)$ al tuturor automorfismelor lui V.

Definiţia 6.18 *Prin* reprezentare ortogonală *a grupului G în spaţiul vectorial euclidian real V se înţelege un morfism de grupuri*

$$T : G \longrightarrow O(V).$$

Observaţia 6.5 Dacă $T : G \longrightarrow O(V)$ este o reprezentare ortogonală atunci

$$\langle T(g)x, T(g)y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in V, \ \ \forall g \in G.$$

Exerciţiul 6.8 Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice cu n linii şi n coloane cu elemente numere reale şi fie ${}^tA$ transpusa ei. Relaţiile

$$A\,{}^tA = I, \qquad {}^tA\,A = I, \qquad A^{-1} = {}^tA.$$

unde $I \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ este matricea unitate, sunt echivalente.

Definiţia 6.19 *Matricea* $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *este numită* matrice ortogonală *dacă*

$${}^tA\,A=I$$

(condiţie echivalentă cu $A^{-1}={}^tA$ *şi* $A\,{}^tA = I$*).*

Observaţia 6.6 Dacă A este o matrice ortogonală atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

Teorema 6.20 *Mulţimea matricelor ortogonale de ordinul* n

$$O(n) = \left\{ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ \middle|\ {}^tA\,A=I \right\}$$

are o structură de grup în raport cu înmulţirea matricelor, iar

$$SO(n) = \{ A \in O(n) \ |\ \det A=1 \}$$

este un subgrup al lui $U(n)$*.*

Demonstraţie. A se vedea demonstraţia teoremei 6.16. ∎

Definiţia 6.21 *Prin* reprezentare matriceală ortogonală *a grupului* G *se înţelege un morfism de grupuri*

$$T : G \longrightarrow O(n).$$

6.5 Grupul rotaţiilor. Reprezentări liniare

Propoziţia 6.22

$$SO(2)=\left\{ \left(\begin{array}{cc} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{array}\right) \;\middle|\; t\in[0,2\pi) \right\}.$$

Demonstraţie. Avem

$$\left(\begin{array}{cc} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cc} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{array}\right), \qquad \left|\begin{array}{cc} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{array}\right|=1$$

şi

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array}\right)\in SO(2) \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha^2+\gamma^2=1 \\ \beta^2+\delta^2=1 \\ \alpha\beta+\gamma\delta=0 \\ \alpha\delta-\beta\gamma=1. \end{array}\right.$$

Din relaţiile $\alpha^2+\gamma^2=1$ şi $\beta^2+\delta^2=1$ rezultă că există $t,s\in[0,2\pi)$ încât

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} \cos t & \sin s \\ \sin t & \cos s \end{array}\right)$$

dar

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta+\gamma\delta=0 \\ \alpha\delta-\beta\gamma=1. \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \sin(t+s)=0 \\ \cos(t+s)=1. \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} s=-t \\ \text{sau} \\ s=2\pi-t. \end{array}\right. \blacksquare$$

Exerciţiul 6.9 Dacă $A\in SO(3)$ atunci există $t\in[0,2\pi)$ şi o matrice $S\in O(3)$ astfel încât

$$S^{-1}AS=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{array}\right).$$

Rezolvare. Fie

$$A=\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)\in SO(3).$$

Matricea A este matricea în raport cu baza canonică a unei transformări ortogonale $A:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este

$$-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right)\lambda-\det A=0$$

Deoarece ${}^tA=A^{-1}$, adică

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}\\ a_{13} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{13} & a_{23}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31}\\ a_{22} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31}\\ a_{12} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

şi $\det A=1$ rezultă că $\lambda=1$ este valoare proprie a lui A. Fie e_1 un vector propriu corespunzător cu $||e_1||=1$, adică $Ae_1=e_1$. Subspaţiul vectorilor ortogonali pe e_1

$$V=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \ \langle x,e_1\rangle=0\ \}$$

este un subspaţiu invariant

$$x\in V \quad\Longrightarrow\quad \langle Ax,e_1\rangle=\langle Ax,Ae_1\rangle=\langle x,e_1\rangle=0.$$

Dacă $\{e_2,\,e_3\}$ este o bază ortonormată în V atunci $\mathcal{B}=\{e_1,\,e_2,\,e_3\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu care matricea lui A are forma

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

unde $\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ este o matrice ortogonală. Notând cu S matricea de trecere de la baza canonică la baza $\mathcal{B}$ avem relaţia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & \gamma & \delta\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}S$$

din care rezultă

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

ceea ce arată că $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SO(2)$. Conform exerciţiului anterior există $t \in [0, 2\pi)$ încât

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Observaţia 6.7 Matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

este matricea unei rotaţii în jurul vectorului e_1 (vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$). Grupul $SO(3)$ este grupul rotaţiilor spaţiului tridimensional.

Exerciţiul 6.10 Aplicaţia $SO(3) \longrightarrow O(\mathbb{R}^3)$ prin care matricei

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in SO(3)$$

i se asociază transformarea ortogonală $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

este o reprezentare ortogonală a grupului $SO(3)$ în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 6.11 Aplicaţia

$$T : SO(3) \longrightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})) : g \mapsto T(g)$$

unde

$$T(g) : \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \qquad (T(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

este o reprezentare liniară în spaţiul vectorial complex $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ al tuturor funcţiilor

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}(T(g_1g_2)f)(x) &= f((g_1g_2)^{-1}x) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}x)\\ &= f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (T(g_2)f)(g_1^{-1}x)\\ &= (T(g_1)(T(g_2)f))(x) = (T(g_1)T(g_2)f)(x).\end{aligned}$$

Exerciţiul 6.12 Mulţimea de matrice

$$O(1,3) = \left\{ A \in GL(4,\mathbb{R}) \mid A\, I_{1,3}\, {}^tA = I_{1,3} \right\}$$

unde

$$I_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

considerată împreună cu înmulţirea este grup (se numeşte grupul Lorentz).

Exerciţiul 6.13

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2) \implies \left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}\,\gamma + \bar{\beta}\,\delta = 0 \\ -\beta\gamma + \alpha\delta = 1 \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \gamma = -\bar{\beta} \\ \delta = \bar{\alpha} \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \end{array} \right.$$

Observaţia 6.8 Grupul $SU(2)$ admite parametrizarea

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta & i\, e^{i(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta \\ i\, e^{-i(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta & e^{-i(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ -2\pi \le \psi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

cu proprietatea

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta & i\, e^{i(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta \\ i\, e^{-i(\varphi-\psi)/2}\sin\frac{1}{2}\theta & e^{-i(\varphi+\psi)/2}\cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta & i\sin\frac{1}{2}\theta \\ i\sin\frac{1}{2}\theta & \cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

parametrii φ, θ, ψ fiind numiţi *unghiurile lui Euler*.

Exerciţiul 6.14 Dacă $a, b \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ atunci

$$\mathrm{tr}\,(ab) = \mathrm{tr}\,(ba).$$

Rezolvare. Avem

$$\mathrm{tr}\,(ab) = \sum_{i=1}^{n}(ab)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(ba)_{jj} = \mathrm{tr}\,(ba).$$

Observaţia 6.9 Folosind baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, putem identifica grupul $SO(3)$ cu grupul de transformări

$$\{\ A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{detA} = 1,\ ||Ax|| = ||x||, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3\ \}.$$

Propoziţia 6.23 *a) Spaţiul matricelor antihermitice de urmă nulă de ordinul doi*

$$W = \{\ u \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid u^* = -u, \quad \mathrm{tr}\, u = 0\ \}$$

este un spaţiu vectorial real de dimensiune 3 *şi*

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow W, \qquad h(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}x_3 & -x_2 + \mathrm{i}x_1 \\ x_2 + \mathrm{i}x_1 & -\mathrm{i}x_3 \end{pmatrix}$$

este un izomorfism cu proprietatea

$$||x||^2 = \det h(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

b) Aplicaţia

$$\eta : SU(2) \longrightarrow SO(3) :\ g \mapsto \eta(g)$$

unde

$$\eta(g) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \eta(g)x = h^{-1}(g\, h(x)\, g^*)$$

este un morfism de grupuri cu nucleul

$$\mathrm{Ker}\,\eta = \left\{\ g \in SU(2)\ \middle|\ \eta(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demonstraţie. a) Avem

$$u=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\mathrm{i}\beta_{11} & \alpha_{12}+\mathrm{i}\beta_{12}\\ \alpha_{21}+\mathrm{i}\beta_{21} & \alpha_{22}+\mathrm{i}\beta_{22}\end{pmatrix}\in W \implies u=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\beta_{11} & \alpha_{12}+\mathrm{i}\beta_{12}\\ -\alpha_{12}+\mathrm{i}\beta_{12} & -\mathrm{i}\beta_{11}\end{pmatrix}.$$

b) Din definiţia lui η rezultă că

$$\begin{aligned}\eta(g_1\,g_2)x &= h^{-1}((g_1\,g_2)\,h(x)\,(g_1\,g_2)^*) = h^{-1}(g_1\,g_2\,h(x)\,g_2^*\,g_1^*)\\ &= h^{-1}(g_1\,h(h^{-1}(g_2\,h(x)\,g_2^*))g_1^*) = \eta(g_1)(\eta(g_2)x) = (\eta(g_1)\,\eta(g_2))x.\end{aligned}$$

Utilizând baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ obţinem relaţiile

$$\eta\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\eta\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}\theta & \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\theta\\ \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\theta & \cos\frac{1}{2}\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

din care deducem că $\det\eta(g)=1$. Deoarece

$$\begin{gathered}(g\,h(x)\,g^*)^* = g\,(h(x))^*\,g^* = -g\,h(x)\,g^*)^* = g\\ \mathrm{tr}(g\,h(x)\,g^*) = \mathrm{tr}(g\,g^*\,h(x)) = \mathrm{tr}\,h(x) = 0\\ ||\eta(g)x||^2 = \det(g\,h(x)\,g^*) = \det h(x) = ||x||^2\end{gathered}$$

rezultă că η este un morfism de grupuri bine definit. Elementul $g\in SU(2)$ aparţine nucleului lui η dacă şi numai dacă $\eta(g)x=x$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^3$. Din relaţiile

$$\eta(g)(1,0,0)=(1,0,0),\qquad \eta(g)(0,1,0)=(0,1,0),\qquad \eta(g)(0,0,1)=(0,0,1)$$

se deduce că $g\in\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$. ∎

Observaţia 6.10 Prin morfismul $\eta: SU(2)\longrightarrow SO(3)$ fiecare element al lui $SO(3)$ corespunde la două elemente din $SU(2)$ care diferă doar prin semn, $\eta(g)=\eta(-g)$. Orice reprezentare liniară

$$T: SU(2)\longrightarrow GL(V)$$

cu proprietatea $T(g) = T(-g)$ defineşte o reprezentare liniară a grupului $SO(3)$.

Exerciţiul 6.15 Aplicaţia $SU(2) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ obţinută asociind fiecarui element

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

transformarea

$$g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \qquad g(z_1, z_2) = (\alpha z_1 + \beta z_2,\ -\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2)$$

este o reprezentare unitară bidimensională a lui $SU(2)$.
Rezolvare. Avem $(g_1\, g_2)(z_1, z_2) = g_1\,(g_2(z_1, z_2))$.

Exerciţiul 6.16 Aplicaţia $T : SU(2) \longrightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}))$ obţinută asociind fiecarui element $g \in SU(2)$ transformarea

$$T(g) : \mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}), \qquad (T(g)f)(z_1, z_2) = f(g^{-1}(z_1, z_2))$$

este o reprezentare liniară a grupului $SU(2)$ in spaţiul vectorial complex al tuturor funcţiilor $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$.
b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ subspaţiul vectorial al polinoamelor omogene de grad n

$$\mathcal{E}_n = \left\{ f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ \ f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k\, z_2^{n-k} \ \middle|\ \ a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

este un subspaţiu invariant al reprezentării definite la punctul a).

Rezolvare. Inversul elemntului

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

este

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

şi în cazul

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z_1^k\, z_2^{n-k}$$

obţinem

$$(T(g)f)(z_1, z_2) = f(g^{-1}(z_1, z_2)) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\bar{\alpha}z_1 - \beta z_2)^k\,(\bar{\beta}z_1 + \alpha z_2)^{n-k}.$$

Observaţia 6.11 Se poate arăta că reprezentările lui $SU(2)$ induse în subspaţiile $\mathcal{E}_n$ sunt reprezentări ireductibile şi că ele sunt până la o echivalenţă toate reprezentările ireductibile ale grupului $SU(2)$. Notând $j = (n-1)/2$, adică $n = 2j+1$, obţinem

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z_1^k\, z_2^{n-k} = \sum_{m=-j}^{j} a_{j+m}\, z_1^{j+m}\, z_2^{j-m}.$$

şi

$$(T(g)f)(z_1, z_2) = \sum_{m=-j}^{j} a_{j+m}(\bar{\alpha}z_1 - \beta z_2)^{j+m}\,(\bar{\beta}z_1 + \alpha z_2)^{j-m}.$$

Pentru fiecare element $a \in SO(3)$ există exact două elemente g_a şi $-g_a$ în $SU(2)$ încât $a = \eta(g_a) = \eta(-g_a)$. Deoarece

$$(T(-g)f)(z_1, z_2) = (-1)^{2j}\,(T(g)f)(z_1, z_2)$$

in cazul in care j este intreg, relaţia

$$SO(3) \longrightarrow GL(\mathcal{E}_{2j+1}) : \; a \mapsto T(g_a)$$

este o reprezentare ireductibilă $(2j+1)$-dimensională a grupului $SO(3)$ în spaţiul vectorial $\mathcal{E}_{2j+1}$.

Capitolul 7

Algebre Lie şi reprezentările lor liniare

7.1 Algebre Lie

Vom prezenta câteva elemente referitoare la algebre Lie şi reprezentările lor liniare.

Definiţia 7.1 *Fie* $\mathbb{K}$ *unul dintre corpurile* $\mathbb{R}$ *şi* $\mathbb{C}$. *Prin* algebră asociativă *peste corpul* $\mathbb{K}$ *se înţelege o mulţime* A *considerată împreună cu trei operaţii*

$$\begin{array}{lll} A \times A :\longrightarrow A: & (a,b) \mapsto a+b & (adunarea) \\ \mathbb{K} \times A :\longrightarrow A: & (\alpha,a) \mapsto \alpha a & (inmultirea\ cu\ scalari) \\ A \times A :\longrightarrow A: & (a,b) \mapsto ab & (inmultirea\ interna) \end{array}$$

astfel încât A *împreună cu primele două operaţii este spaţiu vectorial şi*

1) $a(b+c) = ab + ac, \qquad \forall a,b,c \in A$;

2) $(a+b)c = ac + bc, \qquad \forall a,b,c \in A$;

3) $a(bc) = (ab)c, \qquad \forall a,b,c \in A$;

4) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \qquad \forall a,b \in A,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Prin dimensiunea algebrei A *se înţelege dimensiunea spaţiului vectorial corespunzător.*

Exerciţiul 7.1 a) Mulţimea $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ a tuturor matricelor pătrate de ordinul n considerată împreună cu operaţiile de adunare a matricelor, înmulţire cu scalari şi produsul matricelor este o algebră asociativă peste $\mathbb{K}$.

b) Dacă V este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$ atunci mulţimea $\mathcal{L}(V)$ a tuturor operatorilor liniari $A : V \longrightarrow V$ considerată împreună cu adunarea operatorilor, înmulţirea cu scalari şi compunerea operatorilor este o algebră asociativă peste $\mathbb{K}$.

Definiţia 7.2 *Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$. Prin* algebră Lie *peste corpul $\mathbb{K}$ se înţelege o mulţime L considerată împreună cu trei operaţii*

$$\begin{array}{lll} L \times L :\longrightarrow L : & (a,b) \mapsto a+b & (adunarea) \\ \mathbb{K} \times L :\longrightarrow L : & (\alpha,a) \mapsto \alpha a & (inmultirea\ cu\ scalari) \\ L \times L :\longrightarrow L : & (a,b) \mapsto [a,b] & (crosetul) \end{array}$$

astfel încât L împreună cu primele două operaţii este spaţiu vectorial şi

1) $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a,c] + \beta[b,c], \qquad \forall a,b,c \in L, \ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$*;*

2) $[a,b] + [b,a] = 0, \qquad \forall a,b \in L$*;*

3) $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0, \qquad \forall a,b,c \in A$ *(identitatea Jacobi).*

Prin dimensiunea algebrei Lie se înţelege dimensiunea spaţiului vectorial corespunzător.

Observaţia 7.1 O algebră Lie L poate fi privită ca un spaţiu vectorial L pe care s-a definit o lege de compoziţie internă suplimentară

$$L \times L :\longrightarrow L : \ (a,b) \mapsto [a,b]$$

compatibilă cu structura de spaţiu vectorial.

Propoziţia 7.3 *a) Plecând de la orice algebră asociativă A se obţine o structură de algebră Lie pe A definind croşetul prin*

$$[a,b] = ab - ba.$$

b) Algebra Lie peste $\mathbb{K}$ obţinută plecând de la $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se notează cu $gl(n,\mathbb{K})$.

c) Algebra Lie peste $\mathbb{K}$ obţinută plecând de la $\mathcal{L}(V)$ se notează cu $gl(V)$.

Demonstraţie. Avem

$$[\alpha a+\beta b, c] = (\alpha a + \beta b)c - c(\alpha a + \beta b) = \alpha(ac - ca) + \beta(bc - cb) = \alpha[a,c] + \beta[b,c]$$

$$[a,b] = ab - ba = -(ba - ab) = -[b,a]$$

$$\begin{aligned}[][[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] &= [(ab - ba),c] + [(bc - cb),a] + [(ca - ac),b] \\ &= (ab-ba)c - c(ab-ba) + (bc-cb)a - a(bc-cb) + (ca-ac)b - b(ca-ac) = 0. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Definiţia 7.4 *Prin* bază *a algebrei Lie L se înţelege o bază* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *a spaţiului L privit ca spaţiu vectorial. Coeficienţii* $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$ *din relaţiile*

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \, v_k$$

se numesc constantele de structură *ale algebrei L referitoare la baza aleasă.*

Observaţia 7.2 Notând

$$e_j^i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(singurul element nenul este la intersecţa dintre coloana i şi linia j), orice matrice admite reprezentarea

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^j \, e_j^i = a_i^j \, e_j^i.$$

In cazul $n = 2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} &= a_1^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a_1^1 \, e_1^1 + a_2^1 \, e_1^2 + a_1^2 \, e_2^1 + a_2^2 \, e_2^2. \end{aligned}$$

Propoziţia 7.5 *Algebra Lie* $gl(n, \mathbb{K})$*, de dimensiune* n^2*, admite baza*

$$\{\, e_j^i \ | \ i, j \in \{1, 2, ..., n\} \,\} \qquad cu \qquad [e_j^i, e_m^k] = \delta_m^i \, e_j^k - \delta_j^k \, e_m^i.$$

Demonstraţie. Avem $e_j^i \, e_m^k = \delta_m^i \, e_j^k$. ∎

Definiţia 7.6 *Prin* subalgebră Lie *a algebrei L se înţelege un subspaţiu vectorial*

$$L_1 \subseteq L$$

astfel încât

$$\left.\begin{array}{r} a \in L_1 \\ b \in L_1 \end{array}\right\} \implies [a,b] \in L_1.$$

Observaţia 7.3 Fiecare subalgebră Lie a unei algebre L are o structură de algebră Lie.

Exerciţiul 7.2 a) Mulţimea matricelor de urmă nulă

$$sl(n,\mathbb{K}) = \{\, g \in gl(n,\mathbb{K}) \mid \ \mathrm{tr}\, g = g^1_1 + g^2_2 + \cdots + g^n_n = 0 \,\}$$

este o subalgebră Lie de dimensiune n^2-1 a algebrei $gl(n,\mathbb{K})$.

b) Mulţimea matricelor *antihermitice*

$$u(n) = \{\, g \in gl(n,\mathbb{C}) \mid \ {}^t\bar{g} = -g \,\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune n^2.

c) Mulţimea matricelor antihermitice de urmă nulă

$$su(n) = u(n) \cap sl(n,\mathbb{C}) = \{\, g \in u(n) \mid \mathrm{tr}\, g = 0 \,\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune $n^2 - 1$.

d) Mulţimea matricelor *strâmb simetrice*

$$o(n) = \{\, g \in gl(n,\mathbb{R}) \mid \ {}^t g = -g \,\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$.

e) Mulţimea de matrice

$$o(1,3) = \left\{ g \in gl(4,\mathbb{R}) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t g \right\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune 6 (numită algebra Lie a grupului Lorentz).

Rezolvare. a) Avem $\mathrm{tr}(a+b)=\mathrm{tr}\,a+\mathrm{tr}\,b, \quad \mathrm{tr}(\alpha a)=\alpha\,\mathrm{tr}\,a,$

$$\mathrm{tr}\,ab=\sum_{k=1}^{n}(ab)_k^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_j^k\,b_k^j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_k^j\,a_j^k=\sum_{j=1}^{n}(ba)_j^j=\mathrm{tr}\,ba$$

şi prin urmare, $\mathrm{tr}\,[a,b]=\mathrm{tr}(ab-ba)=0$, oricare ar fi $a,\ b\in gl(n,\mathbb{K})$. O bază a algebrei Lie $sl(n,\mathbb{K})$ este

$$\{\,e_k^j\ |\ k\neq j\ \}\cup\{\,e_k^k-e_n^n\ |\ k\in\{1,2,...,n-1\}\ \}.$$

b) Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $a,b\in u(n)$ atunci

$$\begin{aligned}
{}^t\overline{(\alpha a)}&=\bar{\alpha}\,{}^t\bar{a}=-(\alpha a),\\
{}^t\overline{(a+b)}&={}^t\bar{a}+{}^t\bar{b}=-a-b=-(a+b),\\
{}^t\overline{[a,b]}&={}^t\overline{(ab-ba)}={}^t\bar{b}\,{}^t\bar{a}-{}^t\bar{a}\,{}^t\bar{b}=ba-ab=-[a,b].
\end{aligned}$$

O bază a algebrei Lie $u(n)$ este

$$\{\,e_k^j-e_j^k\ |\ k<j\ \}\cup\{\,\mathrm{i}(e_k^j+e_j^k)\ |\ k<j\ \}\cup\{\,\mathrm{i}\,e_k^k\ |\ k\in\{1,2,...,n\}\ \}.$$

c) O bază a algebrei Lie $su(n)$ este

$$\{\,e_k^j-e_j^k\ |\ k<j\ \}\cup\{\,\mathrm{i}(e_k^j+e_j^k)\ |\ k<j\ \}\cup\{\,\mathrm{i}\,(e_k^k-e_n^n)\ |\ k\in\{1,2,...,n-1\}\ \}.$$

d) O bază a algebrei Lie $o(n)$ este

$$\{\,e_k^j-e_j^k\ |\ k<j\ \}.$$

e) Se obţine

$$o(1,3)=\left\{\left.\begin{pmatrix}0&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \alpha_1&0&\alpha_4&\alpha_5\\ \alpha_2&-\alpha_4&0&\alpha_6\\ \alpha_3&-\alpha_5&-\alpha_6&0\end{pmatrix}\ \right|\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_6\in\mathbb{R}\right\}.$$

O bază a algebrei Lie $o(1,3)$ este $\{\,e_1^2+e_2^1,\ e_1^3+e_3^1,\ e_1^4+e_4^1,\ e_1^3-e_3^1,\ e_4^2-e_2^4,\ e_4^3-e_3^4\ \}$.

Definiţia 7.7 *Fie $G \subseteq GL(n,\mathbb{K})$ un subgrup. Prin* subgrup cu un parametru *al grupului G se înţelege un morfism de grupuri*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

adică o aplicaţie astfel încât

$$g(t+s) = g(t)\,g(s), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 7.3 Oricare ar fi matricea $a \in gl(n,\mathbb{K})$ aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $GL(n,\mathbb{K})$ astfel încât

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$$

(a poate fi privit ca fiind "generatorul infinitezimal" al subgrupului considerat).

Rezolvare. Ţinând seama de definiţia exponenţialei unei matrice obtinem

$$g(t+s) = \mathrm{e}^{(t+s)a} = \mathrm{e}^{ta}\,\mathrm{e}^{sa} = g(t)\,g(s), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{ta} = a\mathrm{e}^{ta}.$$

Observaţia 7.4 Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este diagonalizabilă atunci există o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ şi λ_1, λ_2, ... , λ_n astfel încât

$$A = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S$$

relaţie din care rezultă $\mathrm{tr}\,A = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ şi egalitatea

$$\mathrm{e}^A = S^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} S$$

care conduce la

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}.$$

Se poate arăta că relaţia $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\, A}$ are loc pentru orice matrice A.

Exerciţiul 7.4 a) Dacă
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K})$$
este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in sl(n, \mathbb{K})$.
b) Dacă $a \in sl(n, \mathbb{K})$ atunci $\mathrm{e}^{ta} \in SL(n, \mathbb{K})$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K}), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $SL(n, \mathbb{K})$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

Rezolvare (cazul n=2). Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K}), \qquad g(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}$$

este un subgrup cu un parametru atunci

$$\begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{vmatrix} = 1, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivând această relaţie obţinem egalitatea

$$\begin{vmatrix} g'_{11}(t) & g'_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g'_{21}(t) & g'_{22}(t) \end{vmatrix} = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

care în cazul $t = 0$ devine

$$\begin{vmatrix} g'_{11}(0) & g'_{12}(0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g'_{21}(0) & g'_{22}(0) \end{vmatrix} = 0$$

adică
$$\mathrm{tr}\, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = g'_{11}(0) + g'_{22}(0) = 0.$$

Exerciţiul 7.5 a) Dacă
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in u(n)$.
b) Dacă $a \in u(n)$ atunci $\mathrm{e}^{ta} \in U(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $U(n)$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

Rezolvare. Dacă $g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n)$ este un subgrup cu un parametru atunci

$$g(t)\, {}^t\overline{g}(t) = I \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivând această relaţie obţinem egalitatea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\, {}^t\overline{g}(t) + g(t)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, {}^t\overline{g}(t) = 0$$

care în cazul $t = 0$ devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, {}^t\overline{g}(0) = 0.$$

Exerciţiul 7.6 a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SU(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in su(n)$.
b) Dacă $a \in su(n)$ atunci $\mathrm{e}^{ta} \in SU(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SU(n), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $SU(n)$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

Exerciţiul 7.7 a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow O(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) \in o(n)$.
b) Dacă $a \in o(n)$ atunci $\mathrm{e}^{ta} \in O(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi aplicaţia

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow O(n), \qquad g(t) = \mathrm{e}^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $O(n)$ astfel încât $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = a$.

7.2 Reprezentări liniare

Definiţia 7.8 *Fie L o algebră Lie peste $\mathbb{K}$ şi L' o algebră Lie peste $\mathbb{K}'$, unde corpurile $\mathbb{K}$ şi $\mathbb{K}'$ aparţinând lui $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sunt astfel încât $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$. Prin* morfism de algebre Lie *de la L la L' se înţelege o aplicaţie liniară $A : L \longrightarrow L'$ cu proprietatea*

$$A([a,b]) = [Aa, Ab], \qquad \forall a, b \in L.$$

Definiţia 7.9 *Spunem ca algebrele Lie L şi L' peste acelaşi corp $\mathbb{K}$ sunt* izomorfe *dacă există un morfism bijectiv de algebre Lie (numit izomorfism) $A : L \longrightarrow L'$.*

Propoziţia 7.10 *Dacă algebrele Lie L şi L' peste acelaşi corp $\mathbb{K}$ şi de aceeaşi dimensiune au în raport cu două baze $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi respectiv $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ aceleaşi constante de structură*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \, e_k, \qquad [e'_i, e'_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \, e'_k$$

atunci ele sunt izomorfe.

Demonstraţie. Aplicaţia $A : L \longrightarrow L'$, $Ae_j = e'_j$, adică

$$A(\sum_{i=1}^{n} a_i \, e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, e'_i$$

este un izomorfism de algebre Lie. Ea este, evident, liniară, bijectivă şi

$$\begin{aligned} A[a,b] &= A\left[\sum_{i=1}^n a_i \, e_i, \ \sum_{j=1}^n b_j \, e_j\right] = \sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, A[e_i, e_j] \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \ \sum_{k=1}^n c_{ij}^k A e_k = \sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \ \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e'_k \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, [e'_i, e'_j] = \sum_{i,j=1}^n a_i \, b_j \, [Ae_i, Ae_j] = [Aa, Ab]. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Propoziţia 7.11 *Algebrele Lie reale $o(3)$ şi $su(2)$ sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Algebra Lie $o(3)$ admite baza

$$\{ \, o_1 = e_3^2 - e_2^3, \ o_2 = e_1^3 - e_3^1, \ o_3 = e_2^1 - e_1^2 \, \}$$

cu

$$[o_1, o_2] = o_3, \qquad [o_2, o_3] = o_1, \qquad [o_3, o_1] = o_2$$

iar algebra Lie $su(2)$ baza

$$\{\, u_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_1^1 - e_2^2),\; u_2 = -\frac{1}{2}(e_2^1 - e_1^2),\; u_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_2^1 + e_1^2)\,\}$$

cu

$$[u_1, u_2] = u_3, \qquad [u_2, u_3] = u_1, \qquad [u_3, u_1] = u_2. \ \blacksquare$$

Definiţia 7.12 *Prin* reprezentare liniară *a algebrei Lie L în spaţiul vectorial complex V (numită şi* reprezentare $\mathbb{C}$-liniară*) se înţelege un morfism de algebre*

$$\varrho : L \longrightarrow gl(V),$$

adică o aplicaţie liniară cu proprietatea

$$\varrho([a, b]) = \varrho(a)\, \varrho(b) - \varrho(b)\, \varrho(a), \qquad \forall a, b \in L.$$

Exerciţiul 7.8 Dacă L este o algebră Lie complexă atunci aplicaţia

$$\varrho : L \longrightarrow gl(L) : a \mapsto \varrho(a)$$

unde

$$\varrho(a) : L \longrightarrow L, \qquad \varrho(a)x = [a, x]$$

este o reprezentare liniară a algebrei L în spaţiul L, numită *reprezentarea adjunctă.*

Rezolvare. Aplicaţia ϱ este bine definită

$$\varrho(a)(\alpha x + \beta y) = [a, \alpha x + \beta y] = \alpha[a, x] + \beta[a, y] = \alpha\, \varrho(a)x + \beta\, \varrho(a)y$$

liniară

$$\varrho(\alpha a + \beta b)x = [\alpha a + \beta b, x] = \alpha[a, x] + \beta[b, x] = (\alpha\, \varrho(a) + \beta\, \varrho(b))x$$

şi din identitatea Jacobi rezultă

$$\begin{aligned}\varrho([a, b])x &= [[a, b], x] = -[[b, x], a] - [[x, a], b] = [a, [b, x]] - [b, [a, x]]\\ &= \varrho(a)(\varrho(b)x) - \varrho(b)(\varrho(a)x) = (\varrho(a)\varrho(b) - \varrho(b)\varrho(a))x = [\varrho(a), \varrho(b)]x.\end{aligned}$$

7.3 Reprezentări ireductibile

Definiţia 7.13 *Fie $\varrho : L \longrightarrow gl(V)$ o reprezentare liniară a algebrei Lie L în V. Spunem că subspaţiul vectorial $W \subseteq V$ este* invariant *faţă de ϱ dacă*

$$\varrho(a)(W) \subseteq W, \qquad \forall a \in L$$

adică dacă

$$\left.\begin{array}{l} x \in W \\ a \in L \end{array}\right\} \implies \varrho(a)x \in W.$$

Definiţia 7.14 *Spunem că reprezentarea liniară $\varrho : L \longrightarrow gl(V)$ este o* reprezentare ireductibilă *dacă singurele subspaţii invariante sunt $\{0\}$ şi V. In caz contrar, reprezentarea este numită* reductibilă.

Propoziţia 7.15 *Fie L_1, L_2 două algebre Lie izomorfe, $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ un izomorfism de algebre Lie. Dacă*

$$\varrho_2 : L_2 \longrightarrow gl(V)$$

este o reprezentare liniară a algebrei L_2 atunci

$$\varrho_1 : L_1 \longrightarrow gl(V), \qquad \varrho_1(a) = \varrho_2(\varphi(a))$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L_1 în V. Reprezentarea ϱ_1 este ireductibilă dacă şi numai dacă reprezentarea ϱ_2 este ireductibilă.

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} \varrho_1(\alpha a + \beta b) &= \varrho_2(\varphi(\alpha a + \beta b)) = \varrho_2(\alpha\, \varphi(a) + \beta\, \varphi(b)) \\ &= \alpha \varrho_2(\varphi(a)) - \beta \varrho_2(\varphi(b)) = \alpha \varrho_1(a) - \beta \varrho_1(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_1([a, b]) &= \varrho_2(\varphi([a, b])) = \varrho_2([\varphi(a),\, \varphi(b)])) \\ &= [\varrho_2(\varphi(a)),\, \varrho_2(\varphi(b))] = [\varrho_1(a),\, \varrho_1(b)]. \end{aligned}$$

Dacă $W \subset V$ este un subspaţiu vectorial atunci avem

$$x \in W \implies \varrho_2(a)x \in W, \qquad \forall a \in L_2$$

dacă şi numai dacă

$$x \in W \implies \varrho_1(a)x = \varrho_2(\varphi(a)) \in W, \qquad \forall a \in L_1. \blacksquare$$

Observaţia 7.5 Cunoaşterea reprezentărilor ireductibile ale algebrei Lie $o(3)$ este echivalentă cu cunoaşterea reprezentărilor ireductibile ale algebrei Lie $su(2)$.

Exerciţiul 7.9 Dacă $S : V_1 \longrightarrow V_2$ este un izomorfism de spaţii vectoriale şi

$$\varrho_2 : L \longrightarrow gl(V_2)$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L în spaţiul vectorial V_2 atunci

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(V_1), \qquad \varrho_1(a) = S^{-1}\,\varrho_2(a)\,S$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L în spaţiul vectorial V_1.

Reprezentarea ϱ_1 este ireductibilă dacă şi numai dacă ϱ_2 este ireductibilă.

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}
\varrho_1(\alpha a + \beta b) &= S^{-1}\,\varrho_2(\alpha a + \beta b)\,S \\
&= \alpha\, S^{-1}\,\varrho_2(a)\,S + \beta\, S^{-1}\,\varrho_2(b)\,S = \alpha\,\varrho_1(a) + \beta\,\varrho_1(b) \\
\varrho_1\left([a,b]\right) &= S^{-1}\,\varrho_2([a,b])\,S = S^{-1}\left(\varrho_1(a)\,\varrho_1(b) - \varrho_1(b)\,\varrho_1(a)\right)S^{-1} \\
&= S\,\varrho_2(a)\,S\,S^{-1}\,\varrho_2(b)\,S - S^{-1}\,\varrho_2(b)\,S\,S^{-1}\varrho_2(a))\,S \\
&= \varrho_1(a)\,\varrho_1(b) - \varrho_1(b)\,\varrho_1(a) = [\varrho_1(a),\,\varrho_1(b)].
\end{aligned}$$

Subspaţiul $W \subset V_1$ este invariant dacă şi numai dacă $S(W) \subset V_2$ este invariant. Dacă subspaţiul $S(W)$ este invariant, adică

$$y \in S(W) \implies \varrho_2(a)y \in S(W), \qquad \forall a \in L$$

atunci

$$x \in W \implies \varrho_1(a)x = S^{-1}\,\varrho_2(a)\,Sx \in W, \qquad \forall a \in L.$$

Deoarece $\varrho_2(a) = S\varrho_1(a)S^{-1}$, din

$$x \in W \implies \varrho_1(a)x \in W, \qquad \forall a \in L$$

rezultă

$$Sx \in S(W) \implies \varrho_2(a)Sx = S\varrho_1(a)x \in S(W), \qquad \forall a \in L.$$

Definiţia 7.16 *Spunem că reprezentările liniare*

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(V_1) \qquad si \qquad \varrho_2 : L \longrightarrow gl(V_2)$$

sunt echivalente *dacă există un izomorfism liniar* $S : V_1 \longrightarrow V_2$ *astfel încât*

$$\varrho_1(a) = S^{-1}\,\varrho_2(a)\,S \tag{7.1}$$

adică dacă diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varrho_1(a)"] \arrow[d, "S"] & V_1 \arrow[d, "S"] \\ V_2 \arrow[r, "\varrho_2(a)"] & V_2 \end{tikzcd}$$

este comutativă oricare ar fi $a \in L$.

7.4 Reprezentările algebrelor $sl(2,\mathbb{C})$, $su(2)$ şi $o(3)$

Exerciţiul 7.10 Să se arate că matricele

$$a_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad a_+=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad a_-=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

formează o bază a algebrei Lie complexe $sl(2,\mathbb{C})$ şi

$$[a_3,a_\pm]=\pm a_\pm,\qquad [a_+,a_-]=2\,a_3.$$

Dacă

$$\varrho : sl(2,\mathbb{C})\longrightarrow gl(V)$$

este o reprezentare a algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$ în spaţiul V atunci operatorii liniari

$$A_3=\varrho(a_3),\qquad A_+=\varrho(a_+),\qquad A_-=\varrho(a_-)$$

verifică relaţiile

$$[A_3,A_\pm]=\pm A_\pm,\qquad [A_+,A_-]=2\,A_3.$$

Rezolvare. Matricea

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

apartine algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă $\alpha_{11}+\alpha_{22}=0$. Dar în acest caz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & -\alpha_{11}\end{pmatrix}=2\alpha_{11}\,a_3+\alpha_{12}\,a_++\alpha_{21}\,a_-\ .$$

Deoarece ϱ este morfism de algebre Lie obţinem

$$[A_3,A_\pm]=[\varrho(a_3),\varrho(a_\pm)]=\varrho([a_3,a_\pm])=\varrho(\pm a_\pm)=\pm\varrho(a_\pm)=\pm A_\pm$$

$$[A_+,A_-]=[\varrho(a_+),\varrho(a_-)]=\varrho([a_+,a_-])=\varrho(2\,a_3)=2\varrho(a_3)=2\,A_3.$$

Propoziţia 7.17 *Dacă*

$$\varrho : sl(2,\mathbb{C})\longrightarrow gl(V)$$

este reprezentare ireductibilă de dimensiune $n=2j+1$ *atunci există* $v\neq 0$ *astfel încât*

$$A_3v=jv\qquad si\qquad A_+v=0$$

unde $A_3=\varrho(a_3),\ \ A_+=\varrho(a_+)$.

Demonstraţie. Operatorul liniar $A_3 : V \longrightarrow V$ admite cel puţin o valoare proprie $\lambda \in \mathbb{C}$. Fie $x_0 \in V$ un vector propriu corespunzător, adică $A_3 x_0 = \lambda x_0$. Deoarece

$$A_3(A_+x_0) = (A_3A_+)x_0 = (A_+A_3 + A_+)x_0 = A_+A_3x_0 + A_+x_0 = (\lambda+1)A_+x_0$$

rezultă că vectorul $x_1 = A_+x_0$ verifică relaţia

$$A_3x_1 = (\lambda+1)x_1.$$

Similar, din

$$A_3(A_+x_1) = (A_3A_+)x_1 = (A_+A_3 + A_+)x_1 = A_+A_3x_1 + A_+x_1 = (\lambda+2)A_+x_1$$

rezultă că vectorul $x_2 = A_+x_1 = (A_+)^2x_0$ verifică relaţia

$$A_3x_2 = (\lambda+2)x_2.$$

Se poate astfel arăta că toţi vectorii din şirul

$$x_0, \quad x_1 = A_+x_0, \quad x_2 = (A_+)^2x_0, \quad x_3 = (A_+)^3x_0, \quad ...$$

verifică relaţia

$$A_3x_k = (\lambda+k)x_k.$$

Vectorii nenuli din acest şir sunt vectori proprii ai lui A_3 şi deoarece corespund la valori proprii distincte ei sunt liniar independenţi. Spaţiul V fiind finit dimensional, rezultă ca şirul x_0, x_1, x_2, ... poate conţine doar un număr finit de vectori nenuli, adică există $x_l \neq 0$ cu $x_{l+1} = A_+x_l = 0$. Alegând $v = x_l$ avem $A_+v = 0$. Fie şirul de vectori

$$w_0 = v, \quad w_1 = A_-w_0, \quad w_2 = (A_-)^2w_0, \quad ...$$

Avem

$$\begin{aligned}
&A_3w_0 = (\lambda+l)w_0\\
&A_3w_1 = A_3(A_-w_0) = (A_3A_-)w_0 = (A_-A_3 - A_-)w_0 = (\lambda+l-1)w_1\\
&A_3w_2 = A_3(A_-w_1) = (A_3A_-)w_1 = (A_-A_3 - A_-)w_1 = (\lambda+l-2)w_2
\end{aligned}$$

şi în general

$$A_3w_k = (\lambda+l-k)w_k.$$

La fel ca mai sus se arată că şirul w_0, w_1, w_2, ... conţine un număr finit de termeni nenuli, că există $w_m \neq 0$ cu $w_{m+1} = A_- w_m = 0$. Deoarece

$$\begin{aligned}
A_+ w_1 &= A_+(A_- w_0) = (A_+ A_-) w_0 = ([A_+, A_-] + A_- A_+) w_0 \\
&= 2\, A_3 w_0 = (2\lambda + 2l) w_0 \\
A_+ w_2 &= A_+(A_- w_1) = (A_+ A_-) w_1 = ([A_+, A_-] + A_- A_+) w_1 \\
&= (2\, A_3 + A_- A_+) w_1 = 2(\lambda + l - 1) w_1 + (2\lambda + 2l) A_- w_0 \\
&= 2(2\lambda + 2l - 1) w_1 \\
A_+ w_3 &= A_+(A_- w_2) = (A_+ A_-) w_2 = ([A_+, A_-] + A_- A_+) w_2 \\
&= (2\, A_3 + A_- A_+) w_2 = 2(\lambda + l - 2) w_2 + 2(2\lambda + 2l - 1) A_- w_1 \\
&= 3(2\lambda + 2l - 2) w_2
\end{aligned}$$

şi în general

$$A_+ w_k = k(2\lambda + 2l - k) w_{k-1}$$

subspaţiul

$$W = \langle w_0,\, w_1,\, \ldots,\, w_m \rangle$$

generat de vectorii liniar independenţi w_0, w_1, ..., w_m este invariant faţă de acţiunea operatorilor A_3, A_+ şi A_-. Reprezentarea ϱ fiind ireductibilă trebuie ca $W = V$ şi deci $n = m + 1$. Matricea operatorului A_3 în raport cu baza $\{w_0,\, w_1,\, \ldots,\, w_m\}$ este matricea diagonală

$$\begin{pmatrix}
\lambda + l & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda + l - 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda + l - m + 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda + l - m
\end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte din relaţia $[A_+, A_-] = 2\, A_3$ rezultă că

$$\mathrm{tr} A_3 = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}([A_+, A_-]) = \frac{1}{2}\, (\mathrm{tr}(A_+, A_-) - \mathrm{tr}(A_- A_+)) = 0.$$

Deducem că

$$(\lambda + l) + (\lambda + l - 1) + \cdots (\lambda + l - m) = 0$$

adică
$$(m+1)(\lambda+l)-\frac{m(m+1)}{2}=0.$$
Deoarece $n=m+1$, rezultă că
$$\lambda+l=\frac{m}{2}=\frac{n-1}{2}$$
şi notând $j=(n-1)/2$ obţinem $A_3v=j\,v$. ∎

Propoziţia 7.18 *Dacă*
$$\varrho : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(V)$$
este reprezentare ireductibilă de dimensiune $n{=}2j{+}1$ *si* $v\neq 0$ *este astfel încât*
$$A_3v=j\,v, \qquad A_+v=0$$
atunci sistemul de vectori
$$\{\,v_{-j},\,v_{-j+1},\,...\,,\,v_j\,\}$$
definit prin relaţiile
$$v_j=v, \qquad A_-v_k=\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}\;v_{k-1}$$
este o bază a lui V *astfel încât*
$$A_3v_k=k\,v_k, \qquad A_+v_k=\sqrt{j(j+1)-k(k+1)}\;v_{k+1}.$$

Demonstraţie. Deoarece
$$j(j+1)-k(k-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-j \;\text{ sau }\; k=j+1$$
rezultă că există constantele nenule c_1, c_2, ... , c_{2j} astfel încât
$$v_j=w_0, \quad v_{j-1}=c_1\,w_1, \quad v_{j-2}=c_2\,w_2, \quad ... \quad v_{-j}=c_{2j}w_{2j}$$
unde $\{w_0,w_1,...,w_{2j}\}$ este baza lui V obtinută în demonstraţia propoziţiei precedente. Deoarece $A_3w_k=(j-k)w_k$ rezultă că $A_3v_k=k\,v_k$. Din relaţia
$$A_-v_j=\sqrt{j(j{+}1)-j(j{-}1)}\,v_{j-1}=\sqrt{2j}\,v_{j-1}$$

rezultă
$$\begin{aligned} A_+v_{j-1} &= \tfrac{1}{\sqrt{2j}}\, A_+A_-v_j = \tfrac{1}{\sqrt{2j}}(A_-A_+ + 2A_3)v_j \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2j}}\, 2j\, v_j = \sqrt{2j}\, v_j = \sqrt{j(j+1)-(j-1)j}\, v_j. \end{aligned}$$
Presupunând că $A_+v_k = \sqrt{j(j+1)-k(k+1)}\ v_{k+1}$ obţinem
$$\begin{aligned} A_+v_{k-1} &= \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}}\, A_+A_-v_k = \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}}\ (A_-A_+ + 2A_3)v_k \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}}\ \left(\sqrt{j(j+1)-k(k+1)}A_-v_{k+1} + 2A_3v_k\right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}}\ (\,(j(j+1)-k(k+1)) + 2k\,)\, v_k \\ &= \sqrt{j(j+1)-(k-1)k}\ v_k. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 7.19 *a) Oricare ar fi* $n\in\{0,1,2,...\}$, *oricare ar fi spaţiul vectorial complex* V *de dimensiune* $n=2j+1$ *şi oricare ar fi baza* $\{v_{-j},\, v_{-j+1},\, ...\, ,\, v_j\}$ *a lui* V *aplicaţia*
$$\varrho : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(V)$$
definită prin relaţiile
$$A_3\, v_k = k\, v_k, \qquad A_\pm\, v_k = \sqrt{j(j+1)-k(k\pm 1)}\ v_{k\pm 1} \tag{7.2}$$
unde $A_3=\varrho(a_3)$ *şi* $A_\pm=\varrho(a_\pm)$, *este o reprezentare ireductibilă a algebrei Lie* $sl(2,\mathbb{C})$.
b) Reprezentările (7.2) care au aceeaşi dimensiune sunt echivalente.
c) Reprezentările (7.2) sunt până la o echivalenţă toate reprezentările ireductibile finit dimensionale ale algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$.

Demonstraţie. a) Avem
$$\begin{aligned} [A_3, A_\pm]\, v_k &= (A_3A_\pm - A_\pm A_3)v_k \\ &= (k\pm 1)\sqrt{j(j+1)-k(k\pm 1)}\, v_{k\pm 1} - k\sqrt{j(j+1)-k(k\pm 1)}\, v_{k\pm 1} \\ &= \pm\sqrt{j(j+1)-k(k\pm 1)}\, v_{k\pm 1} = \pm A_\pm v_k \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [A_+, A_-]\, v_k &= (A_+A_- - A_-A_+)v_k \\ &= \sqrt{j(j+1)-k(k-1)}\, A_+v_{k-1} - \sqrt{j(j+1)-k(k+1)}\, A_-v_{k+1} \\ &= (j(j+1)-k(k-1))v_k - (j(j+1)-k(k+1))v_k = 2k\, v_k = 2A_3v_k \end{aligned}$$

ceea ce arată că relaţiile (7.2) definesc o reprezentare a algebrei Lie $sl(2,\mathbb{C})$. Fie $W \neq \{0\}$ un subspaţiu invariant şi fie

$$x = x_{-j}\, v_{-j} + x_{-j+1}\, v_{-j+1} + \ \cdots \ + x_j\, v_j \in W$$

un vector nenul fixat. Cel puţin unul dintre coeficienţii lui x este nenul. Fie

$$k = \min\{\ l \mid x_l \neq 0\ \}$$

Din (7.2) rezultă că

$$(A_+)^{j-l} x = c\, v_j$$

unde c este o constantă nenulă. Deoarece W este invariant, din relaţia precedentă rezultă că $v_j \in W$ şi apoi că vectorii

$$A_- v_j, \quad (A_-)^2 v_j, \quad (A_-)^3 v_j, \quad \ldots\,, \quad (A_-)^{2j} v_j$$

care coincid până la înmulţirea cu anumite constante nenule cu vectorii

$$v_{j-1}, \quad v_{j-2}, \quad \ldots\,, \quad v_{-j}$$

aparţin lui W. Rezultă astfel că orice subspaţiu invariant nenul W coincide cu V.
b) Dacă

$$\varrho : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(V), \qquad \varrho' : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(V')$$

sunt două reprezentări liniare de dimensiune $n = 2j+1$ şi

$$\{v_{-j},\, v_{-j+1},\, \ldots\,,\, v_j\,\}, \qquad \{v'_{-j},\, v'_{-j+1},\, \ldots\,,\, v'_j\,\}$$

bazele corespunzătoare atunci

$$S : V \longrightarrow V', \qquad S v_k = v'_k$$

este un izomorfism liniar şi

$$\varrho(a) = S^{-1} \varrho'(a)\, S, \qquad \forall a \in sl(2,\mathbb{C}).$$

c) Afirmaţia rezultă din propoziţiile 7.17 şi 7.18.

Propoziţia 7.20 *Dacă*

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(V_1), \qquad \varrho_2 : L \longrightarrow gl(V_2)$$

sunt reprezentări liniare ale algebrei Lie L, atunci aplicaţia

$$\varrho_1 \oplus \varrho_2 : L \longrightarrow gl(V_1 \oplus V_2)$$

definită prin relaţia

$$(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a)(x_1, x_2) = (\varrho_1(a)x_1,\ \varrho_2(a)x_2)$$

este o reprezentare liniară (numită suma directă *a reprezentărilor ϱ_1 şi ϱ_2) în*

$$V_1 \oplus V_2 = \{\ (x_1, x_2)\ |\ \ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\ \}.$$

Demonstraţie. Aplicaţia $\varrho_1 \oplus \varrho_2$ este liniară

$$(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(\alpha a + \beta b) = \alpha(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a) + \beta(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)$$

şi

$$\begin{aligned}
(\varrho_1 \oplus \varrho_2)([a,b])(x_1, x_2) &= (\varrho_1([a,b])x_1,\ \varrho_2([a,b])x_2)\\
&= ([\varrho_1(a), \varrho_1(b)]x_1,\ [\varrho_2(a), \varrho_2(b)]x_2)\\
&= (\varrho_1(a)\varrho_1(b)x_1 - \varrho_1(b)\varrho_1(a)x_1,\ \varrho_2(a)\varrho_2(b)x_2 - \varrho_2(b)\varrho_2(a)x_2)\\
&= (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a)\ (\varrho_1(b)x_1,\ \varrho_2(b)x_2) - (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)\ (\varrho_1(a)x_1,\ \varrho_2(a)x_2)\\
&= [(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a), (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)](x_1, x_2). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Observaţia 7.6 In teorema 7.19 am descris reprezentările ireductibile ale algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$. Se poate arăta că orice reprezentare liniară finit dimensională a algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$ este o sumă directă de astfel de reprezentări.

Propoziţia 7.21 *Fie L o algebră Lie reală. Definind pe complexificatul spaţiului vectorial L*

$$^{\mathbb{C}}L = \{\ a + \mathrm{i}\, a'\ |\ a,\ a' \in L\ \}$$

croşetul

$$[a + \mathrm{i}\, a', b + \mathrm{i}\, b'] = [a, b] - [a', b'] + \mathrm{i}\,([a, b'] + [a', b])$$

obţinem o algebră Lie complexă numită complexificata algebrei Lie *reale L.*

Demonstraţie. Prin calcul direct se arată că

$$\begin{aligned}[(\alpha+\mathrm{i}\alpha')(a+\mathrm{i}a') \quad &+(\beta+\mathrm{i}\beta')(b+\mathrm{i}b'),\, c+\mathrm{i}c'] \\ &= (\alpha+\mathrm{i}\alpha')[a+\mathrm{i}a',\, c+\mathrm{i}c'] + (\beta+\mathrm{i}\beta')[b+\mathrm{i}b',\, c+\mathrm{i}c'] \\ [a+\mathrm{i}a',\, b+\mathrm{i}b'] \quad &= -[b+\mathrm{i}b',\, a+\mathrm{i}a'] \\ [[a+\mathrm{i}a',\, b+\mathrm{i}b'],\, c+\mathrm{i}c'] \quad &+[[b+\mathrm{i}b',\, c+\mathrm{i}c'],\, a+\mathrm{i}a'] \\ &+[[c+\mathrm{i}c',\, a+\mathrm{i}a'],\, b+\mathrm{i}b'] = 0. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Propoziţia 7.22 *a) Dacă L este o algebră Lie reală şi dacă*

$$\varrho : L \longrightarrow gl(V)$$

este o reprezentare liniară (în spaţiul vectorial complex V) atunci

$$\tilde{\varrho} : {}^{\mathbb{C}}L \longrightarrow gl(V), \qquad \tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a')x = \varrho(a)x + \mathrm{i}\,\varrho(a')x$$

este o reprezentare liniară.
b) Reprezentarea $\tilde{\varrho}$ este ireductibilă dacă şi numai dacă ϱ este ireductibilă.

Demonstraţie. a) Se arată prin calcul direct că $\tilde{\varrho}$ este aplicaţie $\mathbb{C}$-liniară

$$\tilde{\varrho}(\,(a+\mathrm{i}a')+(b+\mathrm{i}b')\,) = \tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a') + \tilde{\varrho}(b+\mathrm{i}b')$$

$$\tilde{\varrho}(\,(\alpha+\mathrm{i}\beta)(a+\mathrm{i}a')\,) = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\,\tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a')$$

şi că

$$\tilde{\varrho}(\,[a+\mathrm{i}a',\, b+\mathrm{i}b']) = [\tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a'),\, \tilde{\varrho}(b+\mathrm{i}b')].$$

b) Dacă $W \subset V$ este astfel încât

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad \varrho(a)x \in W$$

oricare ar fi $a \in L$, atunci

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a')x = \varrho(a)x + \mathrm{i}\,\varrho(a')x \in W$$

oricare ar fi $a+\mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$. Invers, dacă

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\varrho}(a+\mathrm{i}a')x \in W$$

oricare ar fi $a + \mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$, atunci

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad \varrho(a)x = \tilde{\varrho}(a + \mathrm{i}0)x \in W$$

oricare ar fi $a \in L$. ∎

Observaţia 7.7 L poate fi identificată cu o submulţime a lui ${}^{\mathbb{C}}L$ folosind aplicaţia

$$L \longrightarrow {}^{\mathbb{C}}L : \ a \mapsto a + \mathrm{i}\,0.$$

Mai mult,

$$[a,\, b] = [a + \mathrm{i}0,\, b + \mathrm{i}0], \qquad \forall a, b \in L.$$

Dacă $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ este o bază a algebrei Lie reale L,

$$L = \{\ \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 + \cdots + \alpha_n\, b_n \ |\ \alpha_j \in \mathbb{R}\ \}$$

atunci $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ este în acelaşi timp bază a algebrei Lie complexe ${}^{\mathbb{C}}L$,

$${}^{\mathbb{C}}L = \{\ \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 + \cdots + \alpha_n\, b_n \ |\ \alpha_j \in \mathbb{C}\ \}.$$

Propoziţia 7.23 *a) Dacă*

$$\varrho : {}^{\mathbb{C}}L \longrightarrow gl(V)$$

este o reprezentare liniară a complexificatei algebrei Lie reale L atunci

$$\varrho|_L : \ L \longrightarrow gl(V), \qquad \varrho|_L(a)x = \varrho(a + \mathrm{i}0)x$$

este o reprezentare liniară a lui L.
b) Reprezentarea $\varrho|_L$ este ireductibilă dacă şi numai dacă ϱ este ireductibilă.

Demonstraţie. a) Aplicaţia $\varrho|_L$ este $\mathbb{R}$-liniară

$$\varrho|_L(a + b) = \varrho(a + b + \mathrm{i}0) = \varrho(a + \mathrm{i}0) + \varrho(b + \mathrm{i}0) = \varrho|_L(a) + \varrho|_L(b)$$
$$\varrho|_L(\alpha a) = \varrho(\alpha a + \mathrm{i}0) = \alpha\varrho(a + \mathrm{i}0) = \alpha\varrho|_L(a)$$

şi

$$\begin{aligned} \varrho|_L([a, b]) &= \varrho([a, b] + \mathrm{i}0) = \varrho([a + \mathrm{i}0,\, b + \mathrm{i}0]) \\ &= [\varrho(a + \mathrm{i}0),\, \varrho(b + \mathrm{i}0)] = [\varrho|_L(a), \varrho|_L(b)]. \end{aligned}$$

b) Dacă $W \subset V$ este astfel încât

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad \varrho(a + \mathrm{i}a')x \in W$$

oricare ar fi $a + \mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$, atunci

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad \varrho|_L(a)x = \varrho(\alpha a + \mathrm{i}0)x \in W$$

oricare ar fi $a \in L$. Invers, dacă

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad \varrho|_L(a)x \in W$$

oricare ar fi $a \in L$, atunci

$$\begin{aligned} x \in W \quad \Longrightarrow \quad \varrho(a + \mathrm{i}a')x &= \varrho(a + \mathrm{i}0)x \\ &= \varrho(\, (a + \mathrm{i}0) + (0 + \mathrm{i})\,(a' + \mathrm{i}0)\,)x \\ &= \varrho(a + \mathrm{i}0)x + \mathrm{i}\varrho(a' + \mathrm{i}0)x \\ &= \varrho|_L(a)x + \mathrm{i}\varrho|_L(a')x \in W \end{aligned}$$

oricare ar fi $a + \mathrm{i}a' \in {}^{\mathbb{C}}L$. ∎

Propoziţia 7.24 *Complexificata* ${}^{\mathbb{C}}su(2)$ *a algebrei* $su(2)$ *este izomorfă cu* $sl(2, \mathbb{C})$.

Demonstraţie. Algebra Lie reală $su(2)$ admite baza

$$\{\, u_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_1^1 - e_2^2),\ u_2 = -\frac{1}{2}(e_2^1 - e_1^2),\ u_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e_2^1 + e_1^2)\,\}$$

cu

$$[u_1, u_2] = u_3, \qquad [u_2, u_3] = u_1, \qquad [u_3, u_1] = u_2$$

iar algebra Lie complexă $sl(2, \mathbb{C})$ baza

$$\left\{\ a_3 = \frac{1}{2}(e_1^1 - e_2^2),\ a_+ = e_1^2,\ a_- = e_2^1\ \right\}$$

cu

$$[a_3, a_\pm] = \pm a_\pm, \qquad [a_+, a_-] = 2\, a_3.$$

Aplicaţia $\mathbb{C}$-liniară $A : {}^{\mathbb{C}}su(2) \longrightarrow sl(2,\mathbb{C})$ definită prin

$$Au_1 = -\mathrm{i}\, a_3, \qquad Au_2 = \frac{1}{2}\,(a_+ - a_-), \qquad Au_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-)$$

este un izomorfism de algebre Lie deoarece

$$\begin{aligned}
[Au_1, Au_2] &= \left[-\mathrm{i}\, a_3, \tfrac{1}{2}\,(a_+ - a_-)\right] = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,[a_3, a_+] + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\,[a_3, a_-]\\
&= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-) = A\, u_3 = A\,[u_1, u_2]\\[1ex]
[Au_2, Au_3] &= \left[\tfrac{1}{2}\,(a_+ - a_-),\ -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-)\right] = -\tfrac{\mathrm{i}}{4}\,([a_+, a_-] - [a_-, a_+])\\
&= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,[a_+, a_-] = -\mathrm{i}\, a_3 = Au_1 = A\,[u_2, u_3]\\[1ex]
[Au_3, Au_1] &= \left[-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,(a_+ + a_-),\ -\mathrm{i}\, a_3\right] = -\tfrac{1}{2}\,[a_+, a_3] - \tfrac{1}{2}\,[a_-, a_3]\\
&= -\tfrac{1}{2}\, a_+ - \tfrac{1}{2}\, a_- = Au_2 = A\,[u_3, u_1]. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Observaţia 7.8 Din propoziţia 7.23 rezultă că descrierea reprezentarilor ireductibile ale algebrelor Lie izomorfe $o(3)$ şi $su(2)$ este echivalentă cu descrierea reprezentarilor ireductibile ale algebrei Lie complexe ${}^{\mathbb{C}}su(2)$.
Pe de altă parte, din propoziţiile 7.15 şi 7.24 rezultă că descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrei ${}^{\mathbb{C}}su(2)$ este echivalentă cu descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrei $sl(2,\mathbb{C})$, reprezentări descrise în teorema 7.19.

Propoziţia 7.25 *Plecând de la orice algebră Lie complexă L se poate obţine o algebră Lie reală L_0 prin* restricţia scalarilor *şi*

$$\dim_{\mathbb{R}} L_0 = 2 \dim_{\mathbb{C}} L.$$

Observaţia 7.9 Alegând baze adecvate, se poate arăta că algebra Lie reală $sl(2,\mathbb{C})_0$ obţinută din $sl(2,\mathbb{C})$ prin restricţia scalarilor este izomorfă cu algebra Lie $o(1,3)$ a grupului Lorentz.

Bibliografie

[1] I. Armeanu, *Analiză Funcţională*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1998.

[2] D. Beklémichev, *Cours de Géométrie Analytique et d'Algèbre Linéaire*, Éditions Mir, Moscou, 1988.

[3] V. Brînzănescu, O. Stănăşilă, *Matematici Speciale. Teorie, Exemple, Aplicaţii*, Editura ALL EDUCATIONAL S. A., 1998.

[4] P. Hamburg, P. Mocanu şi N. Negoescu, Analiză Matematică (Funcţii complexe), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[5] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Analiză Funcţională*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[6] W. Miller, Jr., *Lie Theory and Special Functions*, Academic Press, New York, 1968.

[7] G. Mocică , Probleme de Funcţii Speciale, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.

[8] M. Naïmark, A. Stern, *Théorie des Représentations des Groupes*, Éditions Mir, Moscou, 1979.

[9] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele Algebrei*, vol I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[10] M.-E. Piticu, M. Vraciu, C. Timofte, G. Pop, *Ecuaţii Diferenţiale. Culegere de Probleme*, Editura Universităţii Bucureşti, 1995.

[11] I. . Popescu, I. Armeanu, D. Blideanu, N. Cotfas şi I Şandru, Probleme de Analiză Complexa, Editura Tehnică, Bucureşti, 1995.

[12] R. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1978.

[13] J.D. Talman, *Special Functions. A Group Theoretical Approach*, Benjamin, New York, 1968.

[14] C. Teleman, M. Teleman, *Elemente de teoria grupurilor cu aplicaţii în topologie şi fizică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

[15] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, Geometrie şi Ecuaţii Diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[16] N. Ja. Vilenkin, *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes*, Dunod, Paris, 1969.

[17] V. S. Vladimirov, *Ecuaţiile Fizicii Matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[18] V. Vladimirov, Distributions en Physique Mathématique , Editions MIR, Moscou, 1979.

[19] V. S. Vladimirov şi alţii, Culegere de Probleme de Ecuaţiile Fizicii Matematice, Editura Ştiinţifcă şi Enciclopedică , Bucureşti, 1981.